

# مبادئ الإحصاء

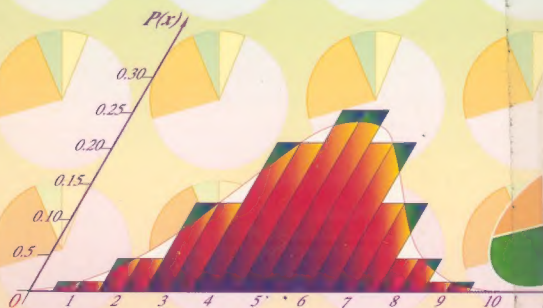
## Elementary Statistics

بروفسور

الأستاذ

عَوْض مَنْصُور

عَزَام صَبْرِي







﴿ قُلْ أَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

مبادئ الإحصاء



# مبادئ الإحصاء

تأليف

الأستاذ عزام صبري

البروفيسور عوض منصور

الطبعة الأولى

٢٠٠٠م - ١٤٢٠هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (١٩٩٩/٨/١٣٦٦)

رقم التصنيف: ٥١٩

المؤلف ومن هو في حكمه: عوض منصور، عزام صبري

عنوان الكتاب: مبادئ الاحصاء

الموضوع الرئيسي: ١- العلوم الطبيعية

٢- الاحصاء

بيانات النشر: عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع

\* - تم اعداد بيانات الفهرسة الاولى من قبل دائرة المكتبة الوطنية

حقوق الطبع محفوظة للناسر

Copyright ©

All rights reserved

الطبعة الاولى

2000 م - 1420 هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري - هاتف وفاكس ٤٦١٢١٩٠

ص.ب ٩٢٢٧٦٢ عمان - الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing

Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan

ردمك 3 - 40 - 402 - 9957 - ISBN

طبع في مطبع الزهر ١١ ٣٦١٠٠٥٥



## بين يدي الكتاب

الحمد لله والصلاة والسلام على خير الأنام ورسول البشرية محمد وعلى آله وصحبه اجمعين وبعد.

من فضل الله ومنته وكرمه ان يمن علينا باصدار سلسلة جديدة في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرجة بلغة مختلفة من لغات الحاسوب بعد سلسلتنا في الحاسبات الالكترونية التي لاقت رواجاً وانتشاراً واسعاً في الجامعات والكليات والمعاهد في انحاء الوطن العربي.

ونأمل ان تتوالى أعداد هذه السلسلة كأختها لتقديم ما يحتاجه طلابنا في الجامعات والكليات من مفاهيم ومبادئ اساسية في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرجة وحرصنا في هذا الكتاب على اغناءه ببرامج الحاسبات لمعظم الطرق الإحصائية وكيفية الوصول إلى نتائج احصائية من خلال استخدام الطالب للحاسوب كما أغنينا الكتاب بمريد من الأمثلة والتمارين حتى تكون عوناً للطلاب لتبسيط المحتوى.

ويكفي ان نذكر ان جميع الشعائر التعبدية في ديننا الحنيف مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالرياضيات والإحصاء بأعداد ركعاتها وفي التساييح ونظام الزكاة والحج وبعدد مرات الطواف والسعي بين الصفا والمروة... الخ.

وقبل الختام نود ان نشكر جميع الأخوة الذين ساهموا في اخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود هذا وإننا نأمل من الأخوة زملاء أن لا يخلوا علينا في ابداء رأيهم

أو ملاحظاتهم القيمة حتى نستطيع العمل على تلافيتها من خلال الطباعات القادمة وفي الختام نسأل الله ان يكون هذا الكتاب خالصا لوجه الله الكريم وأن يكون من العلم الذي يتنفع به.

المؤلفان

1999/8/20



## المحتويات

5	.....مقدمة.
	<b>الفصل الأول: جمع البيانات وعرضها</b>
12	.....1-1: مصادر جميع البيانات.
12	.....1-1-1: المصادر المباشرة
13	.....1-1-2: المصادر غير المباشرة
14	.....2-1: طرق جمع البيانات
15	.....3-1: العينة وطرق اختيارها.
20	.....4-1: تفريغ البيانات الإحصائية.
20	.....1-4-1: التوزيعات التكرارية.
26	.....1-4-2: التوزيع التكراري المتجمع.
29	.....3-4-1: الجداول المقفلة والمفتوحة.
30	.....1-4-4: الجداول المنتظمة وغير المنتظمة.
38	.....5-1: عرض البيانات.
38	.....1-5-1: العرض الجدولي.
40	.....1-5-2: العرض الهندسي للبيانات المنفصلة.
46	.....6-1: التمثيل البياني للجداول التكرارية.
57	.....7-1: انواع المنحنيات.
	<b>الفصل الثاني</b>
	<b>مقاييس النزعة المركزية</b>
73	.....1-2: الوسط الحسابي.
87	.....2-2: الوسيط.
100	.....3-2: المنوال.
107	.....4-2: العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
114	.....5-2: المثنيات والرتب المثنية.
123	.....6-2: العشريرات والربيعات.

### الفصل الثالث مقاييس التشتت

- 137 ..... 1-3: المدى  
140 ..... 2-3: نصف المدى الربيعي  
143 ..... 3-3: الانحراف المعياري

### الفصل الرابع العزوم والتفرطح

- 161 ..... 1-4: العزوم  
164 ..... 2-4: التفرطح  
164 ..... 3-4: الالتواء

### الفصل الخامس التوزيع الطبيعي

- 171 ..... 1-5: شكل المنحنى الطبيعي  
172 ..... 2-5: التوزيع الطبيعي المعياري

### الفصل السادس الاحتمالات

- 189 ..... 1-6: الفضاء العيني  
195 ..... 2-6: التكرار النسبي والاحتمال  
202 ..... 3-6: الحوادث المستقلة  
204 ..... 4-6: الاحتمال المشروط  
206 ..... 5-6: المتغيرات العشوائية  
212 ..... 6-6: نظرية ذات الحدين

### الفصل السابع الارتباط والانحدار

- 219 ..... 1-7: جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط  
220 ..... 2-7: معامل الارتباط وخصائصه  
221 ..... 1-2-7: معامل ارتباط بيرسون  
225 ..... 2-2-7: معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري  
225 ..... 3-2-7: معامل ارتباط سبيرمان للرتب

229	.....3-7: الانحدار
<b>الفصل الثامن</b>	
<b>السلاسل الزمنية</b>	
239	.....1-8: تمثيل السلسلة الزمنية
240	.....2-8: معامل الخشونة والمعدلات المتحركة
246	.....3-8: مركبات السلسلة الزمنية
247	.....4-8: تقدير مركبة الاتجاه
253	.....4-8: تقدير المركبة الفصلية
<b>الفصل التاسع</b>	
<b>الأرقام القياسية</b>	
257	.....1-9: مفهوم الأرقام القياسية وأنواعها واستخدامها
259	.....2-9: الرقم القياسي البسيط
261	.....3-9: الرقم القياسي المرجح
<b>الفصل العاشر</b>	
<b>الاحصاءات الحيوية</b>	
271	.....1-10: تعريف الاحصاءات السكانية وأهميتها
274	.....2-10: التقديرات السكانية
275	.....3-10: إحصائيات الوفيات
277	.....4-10: إحصائيات الخصوبة
280	.....المراجع



# الفصل الأول

## جمع البيانات وعرضها

### 1 - 1 مقدمة :

الطريقة الإحصائية تعتبر من أهم الطرق التي يقوم عليه مفهوم علم الإحصاء وقبل التعرف على مفهوم هذه الطريقة لابد من التعرف على بعض التعريفات التي تفيد في هذا المجال.

**تعريف:** علم الإحصاء علم يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وعرضها ثم تحليل البيانات من أجل الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالات عدم التأكد.

ولاحقاً صنّفه العلماء والمهتمين به إلى صنفين:

**تعريف:** علم الإحصاء الوصفي هو العلم الذي يساعد في تصنيف وتلخيص وعرض البيانات.

**تعريف:** علم الإحصاء التحليلي هو العلم الذي يختص في تحليل البيانات المجموعة والمخصصة بهدف الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالة عدم التأكد.

**تعريف:** الطريقة الإحصائية هي مجموعة الطرق العلمية لجمع البيانات وتبويبها وعرضها ووصفها وتحليلها بهدف استخدام النتائج المنطقية عن الظاهرة قيد البحث.

وتعتمد الطريقة الإحصائية على عناصر أهمها:

أ) جمع البيانات : قبل أن نقوم بهذه العملية علينا مراعاة مايلي:

- 1) تحديد المعلومات المراد جمعها عن الظاهرة بدقة ووضوح.
- 2) التعرف على جميع المحاولات السابقة لدراسة الظاهرة أو الظواهر المشابهة لها حتى نتجنب الازدواجية في العمل ونتعرف على الصعوبات التي واجهت الباحثين ونقوم بتذليلها.
- 3) أن تكون التكلفة لجمع البيانات قليلة إلا في الحالات الإستثنائية.
- 4) أن تكون المعلومات صحيحة ودقيقة حتى تكون النتائج التي يتوصل إليها الباحث صحيحة.

## 1-2) مصادر جمع البيانات

يمكن الحصول على المعلومات من مصدرين:

- 1) المصادر المباشرة.
- 2) المصادر غير المباشرة.

### 1-2-1: المصادر المباشرة ( الميدانية)

وهي الحصول على المعلومات من مصادرها الأصلية وذلك عن طريق الإتصال بمفردات المجتمع قيد البحث مباشرة من خلال توجيه الأسئلة إما عبر المقابلة الشخصية أو التلفون أو المراسلة وستتكم عن كل منها بإيجاز:

\* المقابلة الشخصية: وتتم هذه المقابلة بواسطة أشخاص مدربين على القيام بهذه الأعمال ويقوم الباحث المدرب بطرح أسئلة محددة ومعدة مسبقا على الشخص المقصود ويسجل الإجابة عن هذه الأسئلة.

ومن مميزات المقابلة الشخصية الحصول على معلومات دقيقة ويستطيع الباحث

الذي يقوم بطرح الأسئلة توضيح أي غموض أو التباس قد تكون موجودة في الأسئلة. وأما عيوبها فهي التكلفة العالية والتحيز الناتج عن تأثير جامع البيانات على الشخص المبحوث سواء كان يقصد أم بغير قصد.

**\*\* التلقون:** ويستخدم كوسيلة أيضا مباشرة وهو غير مكلف لكنه غير متوفر لدى الجميع مما يجعل عملية جمع البيانات مقتصرة على من يملكونه وهو هي أهم عيوب هذه الطريقة.

**\*\*\* المراسلة:** ويتم جمع المعلومات عن طريق إرسال استمارة إحصائية إلى الشخص المبحوث عبر البريد، ومن مميزات التكلفة القليلة ولكن يعاب عليها احتمال عدم رد الاستمارة إلى الجهة المصدرة لها.

ويقوم الباحث بجمع البيانات على استمارة إحصائية، والاستمارة الإحصائية عبارة عن صحيفة يوجد بها أسئلة وبجانب كل سؤال يوجد فراغ حتى يستطيع الباحث أو المجيب من وضع الإجابة بجانب السؤال وقد قسم الإحصائيون الاستمارات الإحصائية حسب طريقة تعبئة الاستمارة إلى نوعين:

- (1) كشف البحث: وهو الكشف الذي يقوم الباحث بتعبئته بنفسه
- (2) صحيفة الاستبيان: وهي التي يقوم الشخص المبحوث بملئها وتسلم إليه إما باليد أو عن طريق البريد ويرفق معها شرح للأسئلة الموجودة بها وكذلك مغلف ملصق عليه الطابع حتى يشجع الشخص المبحوث على إرجاع صحيفة الاستبيان إلى الجهة المصدرة، ويعاب عليها عدم تجاوب بعض المبحوثين واقتصارها على الأشخاص الملمون بالقراءة والكتابة.

## 1-2-1: المصادر غير المباشرة (التاريخية)

هي بيانات معدة مسبقا عن ظاهرة ما وباستطاعة الباحث الرجوع إليها وأخذ المعلومات المطلوبة مثل دائرة الإحصاءات العامة ودائرة الأحوال المدنية والوزارات والمؤسسات الخاصة والمؤسسات العامة والمصادر غير المباشرة تشمل الوثائق

والمطبوعات والنشرات الإحصائية التي تصدرها الهيئات في البلاد المختلفة وكذلك الهيئات الدولية مثل هيئة الأمم المتحدة. وكمثال على المصادر التاريخية يمكن أخذ المعلومات عن حالات الوفيات والولادة والزواج والطلاق من سجلات دائرة الأحوال المدنية دون الرجوع إلى الوحدات الأصلية.

أما مميزات هذا المصدر للمعلومات أنه يوفر الوقت والجهد والمال أما عيوبه فمن المحتمل أن تكون البيانات غير دقيقة.

### 3-1 طرق جمع البيانات أو أساليب جمع البيانات

لعل أهم نقطة للباحث الإحصائي هو كيفية الحصول على البيانات الإحصائية وإمامه طريقان:

أ) المسح الشامل: وذلك بأخذ المعلومات عن جميع مفردات المجتمع قيد الدراسة لدراساتها وهي أفضل الطرق حيث تعطي نتائج دقيقة ومفصلة إلا أن هناك صعوبات كالفحص المدمر لبعض المجتمعات أو التي لا يمكن حصرها كدراسة ملوحة مياه المحيطات التي تحول دون استخدام هذه الطريقة لذا تلجأ إلى طريقة أخرى وهي العينة.

ب) العينة: وهي طريقة تعطي معلومات ونتائج أقل دقة من الأولى حيث أن هناك بعض الأخطاء التي يمكن الوقوع بها وتؤثر على النتائج المعطاة ومنا أخطاء الصدقة أو التحيز. ألا أنها أقل تكلفة وجهدا وتوفر كثيرا من الوقت

تعريف: العينة جزء من مجتمع الظاهرة قيد الدراسة تؤخذ بطريقة معينة بحيث تكون ممثلة تمثيلا صحيحا للمجتمع بقصد التعرف على خصائص هذا المجتمع.

#### الاعتبارات التي تدعو إلى استخدام العينات

- توفير الوقت والجهد والنفقات.



- في بعض الاحيان يكون المجتمع المدروس غير محدود ومثال على ذلك كما سبق وأن ذكرنا دراسة ملوحة مياه احدى المحيطات حيث تضطر في هذه الحالة إلى استخدام العينة.

- في بعض الأحيان يؤدي فحص المفردات إلى تدميرها. فالقيام بالمسح الشامل لدم مريض يعني سحب كل دم المريض بغرض تحليله مما يؤدي إلى قتل المريض وفي هذه الحالة لابد من أخذ عينة من دم المريض وفحصها.

#### 1-4) العينة وطرق اختيارها

يوجد نوعان من العينات:

1) العينات العمدية أو الغرضية: ويتم سحبها بطريقة ليست عشوائية وحسب غرض الباحث وتستخدم في الحالات التي يراد منها الحصول على تقديرات تقريبية لتكوين فكرة سريعة عن مشكلة معينة أو لاختبار الاستمارة الاحصائية للتأكد من صلاحيتها.

2) العينات العشوائية: يعني الاختيار العشوائي واتاحة الفرصة امام جميع مفردات المجتمع للظهور في العينة وسنقوم بشرح العينات العشوائية التالية.

أ) العينة العشوائية البسيطة: يتم هذا الاختيار في حالتين:

1) في المجتمعات الصغيرة: أي المجتمعات التي عدد مفرداتها (25) مفردة فأقل في هذه الحالة يتم ترقيم المفردات من 1، 2، .....، (25) وتكتب على بطاقات وحين يطلب عينة ذات حجم (5) مفردات تسحب بطريقة عشوائية دون ارجاع حتى لا تظهر المفردة مكررة.

2) في المجتمعات الكبيرة: أي المجتمعات التي يزيد عدد مفرداتها عن (25) مفردة فنستخدم جدول الأرقام العشوائية واليك المثال التالي موضحا بالخطوات المتبعة لاستخدام هذه الجداول.

مثال (1-1) : مجتمع حجمه 5000 مفردة يُراد سحب عينة حجمها 50 مفردة من هذا المجتمع كيف يتم ذلك مستعينا بجدول الأرقام العشوائية؛

الحل: للإجابة على هذا السؤال نتبع الخطوات التالية:-

(1) نرقم مفردات المجتمع من 1 الى 5000 بالشكل التالي 1،....، 2،....، 4999، 5000.

(2) بما ان حجم المجتمع ذو اربع منازل لذا لابد من التأكد أن جدول الأرقام العشوائية مكون من اربعة منازل وفي حالة توفر جدول ذي خمس منازل فاننا نحذف خانة الآحاد من هذا الجدول.

(3) نبدأ بقراءة الأرقام من جدول الأرقام العشوائية مبتدئين من أقصى اليمين ومن أعلى العمود الأول. آخذين الأرقام التي تقل عن 5000 وغير المتكررة.

(4) نتابع هذه العملية بشكل متسلسل وكلما انتهينا من عمود نبدأ من أعلى العمود المجاور حتى نحصل على حجم العينة المطلوب واذا انتهى الجدول ولم نحصل على حجم العينة المطلوبة، فاننا نقوم بحذف خانة العشرات ونكرر العملية السابقة مرة أخرى حتى نحصل على الحجم المطلوب، واذا لم نحصل على الحجم المطلوب نقوم بحذف خانة المئات وهكذا حتى نحصل على الحجم المطلوب واليك بعض هذه الأرقام الواردة في العينة. 73، 311، 487، 1453، ...

وفيما يلي نقدم نموذجاً لجدول الأرقام العشوائية

22341	21144	13410	63421	39432
27560	48715	43222	89632	31562
33224	14530	44444	67562	21433
37624	86231	40577	38432	22560

20430	32312	42633	47536	67311
30013	11462	47554	43231	68416
42321	12310	56773	59560	97318
62530	14562	47554	60110	73266

### ب- العينة العشوائية المنتظمة :

لاختيار العينة العشوائية المنتظمة نقوم باتباع الخطوات التالية:

- نرقم مفردات المجتمع من 1- حجم المجتمع قيد الدراسة

- نختار عشوائيا مفردة البداية للعينة من الأرقام 1-9

- نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة.

$$\frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \text{الزيادة المنتظمة}$$

- نضيف مقدار الزيادة المنتظمة على مفردة البداية لنحصل على المفردة التالية المختارة في العينة ونتابع اضافة الزيادة المنتظمة بالتتابع إلى ان نحصل على مفردات العينة المطلوبة.

مثال (1-2) : يراد اختيار عينة حجمها 200 مفردة من مجتمع حجمه 4000 مفردة كيف يتم ذلك بطريقة العينة العشوائية المنتظمة؟

الحل: نتبع الخطوات التالية:

(1) نختار مفردة البداية عشوائيا ولتكن المفردة رقم 8 هي المفردة المختارة

(2) نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة:

$$\text{مقدار الزيادة المنتظمة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{400}{20} = 20$$

3) نبدأ بكتابة أرقام العينة بحيث نضيف مقدار الزيادة على مفردة البداية وما تبعها من مفردات.

8، 28، 48، 68، 88، 108، 128، .....، 388

**ج) العينة الطبقية:-** نستخدم هذا النوع عندما يكون المجتمع مقسم إلى طبقات ولاختيار عينة بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:-

- نحدد حجم المجتمع الكبير وليكن (ن)
- نحدد حجم كل طبقة وليكن  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$
- بحيث ان:  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$
- نحدد حجم العينة الكلي وليكن م.
- نحدد حجم العينة الطبقية وليكن  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_r$
- نجد  $m_1, m_2, \dots, m_r$  من العلاقة التالية:

$$1^2 = \frac{n_1}{n} \times m$$

$$2^2 = \frac{n_2}{n} \times m$$

⋮

$$r^2 = \frac{n_r}{n} \times m$$

مثال (1-3) : مجتمع حجمه 10000 مفردة مكون من 4 طبقات حجم كل طبقة على التوالي، 1000، 3500، 4000، 1500 مفردة، يراد سحب عينة حجمها 400 مفردة من هذا المجتمع كيف يتم ذلك بحيث تمثل هذه العينة المجتمع تمثيلاً سليماً؟

الحل : من المعطيات ن=10000 ، ن<sub>1</sub>=1000 ، ن<sub>2</sub>=3500

ن<sub>3</sub>=4000 ، ن<sub>4</sub>=1500 ، م = 400

ثم نبدأ بتحديد حجم كل عينة جزئية باستخدام العلاقة أعلاها

$$1\text{م} = \frac{\text{ن}_1}{\text{ن}} \times \text{م} = 400 \times \frac{1000}{10000} = 40$$

$$2\text{م} = \frac{\text{ن}_2}{\text{ن}} \times \text{م} = 400 \times \frac{3500}{10000} = 140$$

$$3\text{م} = \frac{\text{ن}_3}{\text{ن}} \times \text{م} = 400 \times \frac{4000}{10000} = 160$$

$$4\text{م} = \frac{\text{ن}_4}{\text{ن}} \times \text{م} = 400 \times \frac{1500}{10000} = 60$$

$$\text{م} = 40 + 140 + 160 + 60 = 400$$

(د) **العينة متعددة المراحل** : عندما يتعذر استخدام الطرق السالفة الذكر لاختيار عينة من مجتمع ما فانتسأ نلحاً لأسلوب العينة متعددة المراحل وسنقوم بتوضيح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:-

**مثال (1-4):** يراد قياس المستوى التحصيلي في كلية مجتمع بطريقة العينة متعددة المراحل كيف يتم ذلك؟

**الحل:** من المعلوم ان الكلية تشمل على عدة تخصصات، نقوم باختيار تخصص ما عشوائياً كمرحلة اولى.

- كل تخصص به عدة شعب، نقوم باختيار احدى هذه الشعب عشوائيا. وهذه هي المرحلة الثانية.

- نختار عينة حسب الحجم المطلوب عشوائيا من هذه الشعبة وهي المرحلة الثالثة.

#### **4-1: تفريغ البيانات الاحصائية**

بعد الانتهاء من جمع البيانات سواء كانت البيانات ميدانية ام تاريخية يقوم الباحث بالعملية التالية وهي: عملية تفريغ البيانات، فاذا كان حجم البيانات صغيرا يتم تفريغها يدويا على جداول معدة لهذا الغرض اما اذا كان حجم البيانات كبيرا فيمكن الاستعانة بالآلات التي تعتمد على نظام البطاقات المثقبة سابقا والاقراص الممغنطة والاشرطة حاليا وهذا لا يتم الا عن طريق الترميز للبيانات الوصفية حتى لا تأخذ حيزا كبيرا سواء على البطاقات المثقبة او الاقراص حتى تحفظ في الاجهزة الالكترونية والحاسبات الالكترونية لحين الطلب.

#### **1-4-1 : التوزيعات التكرارية**

**تعريف:** التوزيع التكراري هو عبارة عن توزيع البيانات المأخوذة عن ظاهرة معينة على الفئات بحيث تقع كل مفردة في فئة واحدة فقط والمفردات التي تقع في فئة واحدة تكون متجانسة. ثم نقوم بعدد المفردات التي تقع في الفئة ونضعها في جدول يسمى بالجدول التكراري.

اما اذا كان مدى البيانات صغيرا فانه يمكننا بناء الجدول التكراري بترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا حتى نصل إلى أعلى قيمة وهذا يمثل العمود الأول، أما العمود

الثاني فيمثل عدد المرات التي تكررت بها كل مفردة.

مثال (5-1): البيانات التالية تمثل الأجور اليومية لخمسة عشر عاملا بالدينار الأردني مصنفة بالجدول (5-1) .

الأجور اليومية	عدد العمال
3	2
3.5	2
4	2
5	3
5.5	1
6	3
المجموع	15

جدول(5-1)

وهذا مثال على تبويب البيانات في جدول.

وأما اذا كان المدى كبيرا وحجم البيانات ايضا كبيرا فلا بد من تقسيم قيم البيانات الى فئات ذات اطوال متساوية او غير متساوية وتفرغ البيانات على هذه الفئات وهذا مايسمى بالتوزيع التكراري الفئوي ونقوم باتباع الخطوات التالية في انشائه:

(1) نحدد اعلى قيمة للملاحظات وادنى قيمة للملاحظات.

(2) نحدد مدى هذه البيانات من العلاقة.

المدى المطلق = اعلى قيمة مشاهدة-ادنى قيمة+1 (للدقة)

(3) نحدد عدد الفئات وهذا يكون عادة حسب رغبة الباحث ولكن بشكل عام فان العدد يتراوح  $5 \leq$  عدد الفئات  $\leq 10$  . الا ان بعض الباحثين يرى ان تكون بين  $5 \leq$  عدد الفئات  $\leq 15$  الا ان هذا فيه جهد كبير للباحث.

4) يحدد طول الفئة وذلك من العلاقة:

المدى المطلق

$$\frac{\text{طول الفئة}}{\text{عدد الفئات}}$$

ويستحسن ان يكون طول الفئة خال من الكسور لتسهيل العمليات الحسابية. وعند ظهور مثل هذه الكسور فلا بد من التخلص منها عن طريق تقريبها الى اعلى وهذا بدوره يؤدي الى نقص في عدد الفئات او مطابقة للفئات المفترضة.

5) نعين الحد الادنى للفئة الاولى وهو اصغر قيمة مشاهدة.

6) نحدد الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى} = \text{الحد الادنى للفئة الاولى} - \frac{1}{2} \text{ وحدة دقة}$$

7) نعين الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى} = \text{الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى} + \text{طول الفئة}$$

او نحدد الحد الاعلى للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى} = \text{الحد الاعلى للفئة الاولى} + \frac{1}{2} \text{ وحدة دقة}$$

8) نجد الحدود الفعلية الدنيا والعليا وكذلك الحدود الدنيا والحدود العليا لباقي الفئات من العلاقات التالية:-

$$\text{الحد الادنى للفئة اللاحقة} = \text{الحد الادنى للفئة السابقة} + \text{طول الفئة}$$

$$\text{الحد الادنى الفعلي للفئة اللاحقة} = \text{الحد الادنى الفعلي للفئة السابقة} + \text{طول الفئة}$$

$$\text{الحد الاعلى الفعلي للفئة اللاحقة} = \text{الحد الاعلى الفعلي للفئة السابقة} + \text{طول الفئة}$$



(9) نحدد مراكز الفئات وذلك من خلال إيجاد مركز الفئة الاولى من العلاقة:

$$\text{مركز الفئة الاولى} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة الاولى} + \text{الحد الأعلى للفئة الاولى}}{2}$$

2

الحد الأدنى الفعلي للفئة الاولى + الحد الأعلى الفعلي للفئة الاولى

2

(10) نجد مراكز الفئات اللاحقة من العلاقة:

مركز الفئة اللاحقة = مركز الفئة السابقة + طول الفئة

(11) نفرغ البيانات على الفئات باستخدام الخطوط الرأسية لكل تكرار وعط افقي للتكرار الخامس ونستمر في التفريغ حتى نهاية آخر مشاهدة.

(12) نسجل مجموع التكرارات عدديا امام كل فئة لتمثل بعمود التكرارات.

(13) نجمع التكرارات لنقارنها بمجموع المشاهدات حيث يجب التطابق.

مثال (1-6) : البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لخمسين موظف في احدى الشركات الصناعية.

37، 57، 49، 54، 19، 38، 44، 24، 46، 43، 47، 45، 29، 53، 41، 37،

49، 56، 47، 29، 31، 32، 51، 52، 42، 45، 28، 43، 49، 34، 24، 42، 28،

39، 21، 18، 37، 34، 29، 23، 35، 43، 39، 41، 26، 27، 32، 37، 28.

المطلوب: انشاء جدول تكراري يمثل جميع ما ورد سابقا.

الحل: نبدأ باتباع الخطوات السابقة.

- نجد المدى المطلق - اكبر قيمة - اصغر قيمة + 1 = 57 - 18 + 1 = 40

- ليكن عدد الفئات 6.

- نجد طول الفئة من العلاقة.

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{40}{6} = 6.66 \approx 7$$

- نعين الحد الأدنى للفئة الأولى وليكن أصغر قيمة وهو 18.

- نعين الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى  $18 - 0.5 = 17.5$ .

- نعين الحد الأعلى الفعلي للفئة الأولى  $17.5 + \text{طول الفئة} = 17.5 + 7 = 24.5$ .

- نعين الحد الأعلى للفئة الأولى  $24.5 - 0.5 = 24$ .

بهذا نكون قد حصلنا على الحدود العليا والدنيا وهي [18، 24] والحدود الفعلية الدنيا والعليا للفئة الأولى وهي [5، 17، 5، 24]. وبإضافة العدد 7 وهو طول الفئة لكل من الحدود الدنيا والعليا السابقة نحصل على الحدود الدنيا والعليا للفئات اللاحقة.

- نعين مركز الفئة الأولى  $= \frac{24+18}{2} = 21$  نضيف طول الفئة إلى مركز الفئة السابقة لنحصل على مراكز الفئات اللاحقة.

- نفرغ البيانات المعطاة على الفئات التي أنشأناها سابقا وذلك بوضع خطوط رأسية وخط مائل للقراءة الخامسة.

- نجتمع التكرارات المناسبة في عمود الخطوط ونضع المجموع في عمود التكرارات.

- نتأكد من مطابقة عدد المشاهدات مع مجموع التكرارات.

نلخص كل الخطوات السابقة الذكر في الجدول التالي:

حدود الفئة (1)	الحدود الفعلية للفئة (2)	مركز الفئة (3)	الاشارات (4)	التكرار
24-18	24.5-17.5	21	I	6
31-25	31.5-24.5	28		9
38-32	38.5-31.5	35		10
45-39	45.5 - 38.5	42		12
52-46	52.5-45.5	49		8
59-53	59.5-52.5	56		5

وطالما اننا بصدد التكرارات فلا بد من التنويه الى التكرار النسبي والتكرار  
المثوي وعليه فيكون التكرار النسبي لكل فئة هو .

تكرار الفئة

التكرار النسبي =  $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$

تكرار الفئة

التكرار المثوي للفئة =  $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}} \times 100\%$

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي:

مثال (1-7): البيانات التالية تمثل فئات الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبينة بالجدول (1-7)

فئات الاجور	34-30	39-35	44-40	49-45	54-50	المجموع
التكرار	5	10	20	25	40	100

جدول ( 1 - 7 )

المطلوب: تكوين جدول التكرار النسبي والتكرار المثوي لهذه البيانات .

الحل: الجدول المطلوب هو جدول (1-8)

الفتات	التكرار كـ	التكرار النسبي	التكرار المئوي
34-30	5	$\frac{5}{100}$	%5
39-35	10	$\frac{10}{100}$	%10
44-40	20	$\frac{20}{100}$	%20
49-45	25	$\frac{25}{100}$	%25
54-50	40	$\frac{40}{100}$	%40
المجموع	100	$1 = \frac{20}{20}$	%100

جدول (1-8)

$$100 = \sum_{i=1}^n \text{كـ}$$

نلاحظ أن

#### 1-4-2 التوزيع التكراري المتجمع

في بعض الاحيان نحتاج الى معرفة عدد المفردات التي تساوي او تزيد عن قيمة معينة أو تساوي او تقل عن قيمة معينة وحتى نستطيع الحصول على هذه المعلومات لابد من تكوين جدول تكراري متجمع وهو يبين التكرارات المتجمعة لأكبر من فئة وهو نوعان:

(أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد (ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

#### (أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد

خطوات انشاء الجدول

- نضيف فئة سابقة وتكرارها صفر
- نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.
- نحدث عمودا جديدا يحوي نهاية الفئات.

- تقوم بتجميع التكرارات من اعلى الى اسفل.

مثال (8-1): الجدول التالي يمثل الأجر لخمس عشرة عاملاً كما هو مبين في جدول (9-1)

فئات الأجر	5-3	8-6	11-9	14-12	17-15
عدد العمال	0	2	3	4	6

جدول (9-1)

المطلوب: تكوين جدول متجمع صاعد لهذه البيانات.

الحل: نكون جدول الحل (10-1)

فئات الأجر	عدد العمال	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
5-3	صفر	5.5-2.5	أقل من 5.5	صفر
8-6	2	8.5-5.5	أقل من 8.5	2
11-9	3	11.5-8.5	أقل من 11.5	5
14-12	4	14.5-11.5	أقل من 14.5	9
17-15	6	17.5-14.5	أقل من 17.5	15
المجموع	15			

جدول (10-1)

نلاحظ على الجدول ما يلي:

1) التكرار الصاعد للمناظر للفتة الأولى يساوي تكرار الفتة الأولى.

(2) التكرار المتجمع الصاعد المناظر للفتة الأخيرة يساوي مجموع التكرارات كلها.

### ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

خطوات انشاء الجدول:

(1) نضيف فقة لاحقة وتكرارها صفر.

(2) نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.

(3) نحدث عمودا جديدا يحوي على بداية الفئات.

(4) نقوم بتجميع التكرارات من أسفل الى أعلى

والان نطبق هذه الخطوات على المثال السابق ليظهر في جدول (11-1).

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
8-6	2	8.5-5.5	اكثر من 5.5	15
11-9	3	11.5-8.5	اكثر من 8.5	13
14-12	4	14.5-11.5	اكثر من 11.5	10
17-15	6	17.5-14.5	اكثر من 14.5	6
20-18	صفر	19.5-17.5	اكثر من 17.5	صفر

جدول (1 - 11)

ونلاحظ على الجدول ما يلي:-

1- ان التكرار المتجمع الهابط للفتة الأولى يساوي مجموع التكرارات.

2- ان التكرار المتجمع الهابط المناظر للفتة الأخيرة يساوي تكرار الفتة الأخيرة كما

ونستطيع ان نعرف من الجدول ان عدد الذين تزيد أجورهم مثلاً عن 8 دينار

هو 13 موظفاً وعدد الذين تزيد أجورهم عن 11.5 دينار هو 10 موظفين

أما بالنسبة لجدول التكرار المتجمع الصاعد فاننا نستطيع إيجاد عدد الذين تقل أعمارهم مثلاً عن 8.5 دينار وهما موظفان او من تقل رواتبهم عن 14.5 دينار (وهم تسعة موظفين).

وفي نهاية التوزيعات التكرارية لابد من القاء الضوء على بعض النقاط الهامة التي فاتنا ذكرها.

#### 1-4-3: الجداول المقفلة والمفتوحة:

**تعريف:** الجدول المقفل هو الجدول الذي تكون فيه الفئة الاولى والفئة الاخيرة محددة. اما الجدول المفتوح من طرفه الادنى فهو الجدول الذي تكون فيه بداية الفئة الاولى غير محددة. اما الجدول المفتوح من طرفه الاعلى فهو الجدول الذي تكون نهاية الفئة الاخيرة غير محدودة. اما اذا كانت بداية الفئة الاولى غير محددة ونهاية الفئة الأخيرة غير محددة فيكون الجدول مفتوحاً من كلا طرفيه ويمكن التوضيح بالمثال التالي:-

6-3	اقل من 3	6-3	اقل من 3
10-7	6-3	10-7	6-3
14-11	10-7	14-11	10-7
	14-11		14-11
	اكبر من 14	اكبر من 14	
جدول مقفل	مفتوح من كلا طرفيه	مفتوح من طرفه الاعلى	مفتوح من طرفه الادنى

جدول رقم (1-12) جدول رقم (1-13) جدول رقم (1-14) جدول رقم (1-15)

وكلما كان الجدول مقفلاً كلما كانت العمليات الحسابية اسهل.

#### 1-4-4: الجداول المنتظمة وغير المنتظمة:

**تعريف:** الجدول المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات متساوية.

**تعريف:** الجدول غير المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات غير متساوية.

- في حالة انشاء جدول تكراري فان الباحث يقوم بافتراض عدد الفئات لانه لا يوجد قاعدة عامة يعتمد عليها في تحديد عددها الا انه يجب مراعاة الاعتبارات التالية عند تحديد عدد الفئات:

(1) حجم البيانات وتباينها وتجانسها

(2) النتيجة التي يريد الباحث الوصول إليها أن تكون دقيقة او تقريبية.

**تعريف:** الفئة عبارة عن مجموعة جزئية محددة بمحددين الاصغر. ويسمى الحد الادنى والاكثر ويسمى الحد الاعلى والمفردات الموجودة في الفئة متقاربة ويفضل ان تكون اطوال الفئات متساوية لكي تسهل العمليات الحسابية.

- **تعين حدود الفئات:** عند تعيين حدود الفئات التي يجب أن تأخذ بعين الاعتبار عدم تداخل هذه الحدود وهذا يعتمد على معرفتنا لنوعين من البيانات هما:-

(1) البيانات المأخوذة عن ظاهرة منفصلة وتأخذ قيما صحيحة مثل اعداد السيارات، البيوت، الطلاب، الطائرات...الخ.

فلو كانت البيانات المتوفرة لدينا عن اعداد الطائرات الهابطة في مطار عمان الدولي ولمدة مئة يوم ولو فرضنا ان اقل يوم هبطت في المطار بـ 20 طائرة واكثر يوم هبطت فيه 43 طائرة. نلاحظ بأن هذه الظاهرة هي ظاهرة منفصلة (وثابة) والبيانات المأخوذة عنها اعداد صحيحة ولو فرضنا ان طول الفئة يساوي (5) وحدات فان افضل شكل لكتابة هذه الفئات هي الفئات التي يوجد بها ثغرة مقدارها واحد صحيح يبين الحد الاعلى للفئة والحد الادنى للفئة التي تليها وتكون بالصورة التالية:-

20-24، 25-29، 30-34، 35-39، 40-44 ونلاحظ انه يوجد ثغرة مقدارها

واحد صحيح بين 24، 29.25، 34.30، 35، ... الخ وهذه الفئات غير متداخلة.



ونتعامل مع هذه الفئات بالحدود الفعلية لها فان الحدود الفعلية للفئة الاولى 19.5 - 24.5.... الخ ويمكن استخراج طول الفئة لهذا النوع من الفئات عن طريق العلاقة التالية:

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{الحد الاعلى الفعلي} - \text{الحد الادنى الفعلي}}{\text{العدد}} \quad (2)$$

البيانات المأخوذة عن ظاهرة متصلة (مستمرة) وتأخذ قيما كسرية مثل البيانات عن الاطوال، الاوزان، الاحجام، المسافات.... الخ. فلو فرضنا ان لدينا بيانات عن اوزان 50 رجلا (ظاهرة متصلة) وكان اقل مشاهدة هي 55 كغم واكثر مشاهدة 70 كغم ان البيانات في هذه الحالة تأخذ قيما كسرية وافضل طريقة لكتابة الفئات هي ان تبدأ الفئة بنفس القيمة التي تنتهي فيها الفئة السابقة ولو كان طول الفئة 4 وحدات فان الفئات تكتب بالصورة التالية:

#### الفئات

55 وأقل من 59

59 وأقل من 63

63 وأقل من 67

67 وأقل من 71

ان هذه الفئات غير متداخلة ولا يوجد بينها ثغرات فالفئة الاولى تعني ان جميع الذين تقع اوزانهم بين 55 كغم واقل من 59 كغم تقع ضمن الفئة الاولى اما الرقم (59) فيقع في الفئة الثانية وهكذا.

الفئات غير المتساوية: في حالة بروز فئات غير متساوية في بعض الجداول التكرارية فاننا نلجأ لحساب التكرار المعدل والذي يمكن الحصول عليه من العلاقة التالية :

$$\text{تكرار الفئة المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة الأصلية}}{\text{طول الفئة}}$$

وبعد ذلك نقوم بالحسابات المطلوبة كالمعتاد ولتوضيح هذا المفهوم نقوم بإعطاء المثال التالي.

مثال (1-9) : الجدول (1-16) يمثل توزيع القوى العاملة في الأردن حسب السن (بالالف) لسنة 1970 والمطلوب عمل تكرار معدل لعمود التكرارات.

العمر	-10	-15	-20	-25	-30	-40	-50	-60	65 فما فوق
عدد العمال	10	70	106	89	133	79	45	14	15

جدول (1-16)

الحل : نلاحظ من الجدول أعلاه أن الفئات غير متساوية لذا نقوم بعمل جدول التكرار المعدل والمبين في جدول (1-17):

فئات العمر	عدد العمال	التكرار المعدل
-10	10	$2 = \frac{10}{5}$
-15	70	$14 = \frac{70}{5}$
-20	106	$21.6 = \frac{106}{5}$
-25	89	$17.8 = \frac{89}{5}$
-30	133	$13.3 = \frac{133}{10}$
-40	79	$13.3 = \frac{133}{10}$
-50	45	$7.9 = \frac{79}{10}$
-50	45	$4.5 = \frac{45}{10}$
-60	14	$2.8 = \frac{14}{5}$
65 فما فوق	15	$3 = \frac{15}{5}$

جدول (1-17)

مثال (10-1): البيانات التالية تمثل أطوال وأوزان 30 طالباً مبنية بالجدول (18-1)

الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن
160	53	171	68	169	68	170	68	150	51	160	55
165	54	178	74	167	70	179	75	175	53	171	65
162	60	177	69	171	65	184	80	168	62	175	69
167	58	179	77	155	50	172	61	159	75	181	54

جدول (18-1)

المطلوب:

- 1) تكوين جدول تكراري مزدوج لهذه البيانات
- 2) عدد الطلاب الذين أوزانهم تتراوح بين 55 وتقل عن 70
- 3) عدد الطلاب الذين أوزانهم 60 فما فوق وأطوالهم 160 سم فما فوق
- 4) عدد الطلاب الذين أطوالهم 165 فما فوق
- 5) أوجد التوزيع الهامشي لقيم س والتوزيع الهامشي لقيم ص.

الحل: 1) نبدأ أولاً بتكوين الجدول التكراري المزدوج في جدول (19-1)

فئات الأوزان ص	-50	-55	-60	-65	-70	-75	80-85	المجموع
س فئات الأطوال								
-155	//				/			3
-160	/	/	//					4
-165	/	/	///	/	/			7
-170			/	////	/	/		7
-175	/			//	/	//		6
185-180	/						//	3
المجموع	6	2	6	7	3	4	2	30

جدول (19-1)

(2) عدد الطلاب =  $15=7+6+2$

(3) عدد الطلاب = 21

(4) عدد الطلاب =  $23=3+6+7+7$

(5) التوزيع الهامشي لقيم ص كما في جدول (1-20)

الأطوال	التكرار
-155	3
-160	4
-165	7
-170	7
-175	6
185 - 180	3
	30

جدول ( 1 - 20)

والتوزيع الهامشي لقيم ص كما في الجدول ( 1 - 21)

الأوزان	التكرار
-50	6
-55	2
-60	6
-65	7
-70	3
-75	4
85-80	2
	30

جدول (1-21)

مثال (11-1) : أكتب التكرار المعدل للبيانات في الجدول التالي :

الفئات	-150	-155	-165	195-185
التكرار	15	50	50	30

الحل : نكون جدول الحل (22-1).

الفئات	التكرار	التكرار المعدل
-150	15	$3 = \frac{15}{5}$
-155	50	$5 = \frac{50}{10}$
-165	50	$2.5 = \frac{50}{20}$
195-185	30	$3 = \frac{30}{10}$

جدول (22-1)

مع ملاحظة أنه لايجاد التكرار المعدل نجده من العلاقة التالية:

تكرار الفئة

التكرار المعدل للفئة =

طول الفئة

ملاحظة : التكرار المعدل لا يوجد الا للحالات التي تكون فيها الفئات غير منتظمة

ونادراً ما يستعمل عندما تكون الفئات متساوية

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الأجر لخمسين عاملاً مبيئة بالجدول (23-1):

فئات الأجر	التكرار
-40	8
-60	12
-80	20
-100	6
140-120	4
المجموع	50

جدول (23-1)

- المطلوب: (1) إيجاد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 80 دينار.  
 (2) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 55 دينار.  
 (3) نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً يزيد عن 90 دينار.  
 (4) نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً بين 55-90.  
 (5) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 90 دينار.  
 (6) إيجاد قيمة الأجر الذي يستحق صاحبه الدعم والأجر الأعلى الذي يستحق صاحبه المكافأة إذا اتفق على أن تكون النسبة الأولى 8٪ من العمال والنسبة التالية 12٪ من العمال.

الحل: (1) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن  $80 = 12 + 8 = 20$  عاملاً.

(2) طول الفترة  $60 - 40 = 20$ ،  $55 - 40 = 15$  الفرق في الراتب

والآن نقوم بعمل نسبة وتناسب

$$8 \leftarrow 20$$

$$\begin{array}{ccc} 20 & 8 & \leftarrow 15 \text{ س} \\ \hline 15 & \text{س} & \end{array} =$$

$$\text{وبالضرب التبادلي فإن: } 20\text{س} = 120 \therefore \text{س} = \frac{120}{20} = 6$$

$\therefore$  عدد العمال = 6 عمال الذين تقل أجورهم عن 55 دينار.

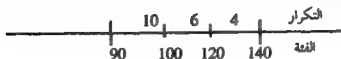


شكل (1-1)

(3)  $100 - 80 = 20$  طول الفئة

$$90 - 80 = 10$$

$$\begin{aligned}
 & 20 \leftarrow 20 \\
 & 20 \leftarrow 10 \quad \leftarrow 20 \quad 20 \\
 & 20 = 20 \text{ س} \quad \leftarrow \frac{20}{\text{س}} = \frac{20}{10} \\
 & \therefore \text{س} = \frac{200}{20} = 10
 \end{aligned}$$



شكل (2-1)

مجموع العمال الذي تزيد رواتبهم عن 90 دينار =  $20+4+6+10=40$  عامل

$$\%40 = \%100 \times \frac{20}{50} = 90 \text{ عن رواتبهم تزيد رواتبهم عن } 90$$

(4) عدد العمال الذين تقع رواتبهم بين 55،  $90=10+12+2=24$  عامل

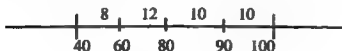


شكل (3-1)

نسبة العمال الذين رواتبهم بين (90-55)

$$\%48 = \%100 \times \frac{24}{50} =$$

(5) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 90 دينار =  $30=8+12+10$  عاملا



شكل (4-1)

$$\text{النسبة} = \frac{30}{50} \times 100\% = 60\%$$

$$(6) \text{ النسبة الأولى} = \frac{80}{100} \times 50 = 40 \text{ عمال}$$

$$20 \leftarrow 8$$

$$8 \leftarrow 4 \Leftarrow \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \Leftarrow 8 \text{ س} = 80$$

$$\therefore \text{س} = 10$$

الاجر الذي يستحق الدعم = 40 + 10 = 50

$$\text{عدد الاشخاص الذين يستحقون المكافأة} = 50 \times \frac{12}{100} = 6.$$

## 1-5 عرض البيانات:

بعد جمع وتبويب البيانات يأتي عرض البيانات وهذا يساعد الناظر على أخذ فكرة سريعة عن الظاهرة قيد الدراسة دون تعب واجهاد ويوجد عدة طرق للعرض نذكر اهمها.

### 1-5-1 العرض الجدولي:

يكسب العرض الجدولي اهمية كبرى بعد أن يقوم الباحث بتفريغ البيانات الاحصائية ضمن جداول لها ميزات رئيسية منها:

- ان يكون للجدول عنواناً كاملاً مختصراً معبراً عما يحويه الجدول من بيانات.
- أن يضع عناوين بارزة لكل من الصفوف والأعمدة.
- أن يعطي لكل جدول رقم معين.



- أن تحدد الوحدات المستخدمة في الجدول حسب البيانات الموجودة.
- أن ترتب البيانات في الجدول حسب الأهمية والتسلسل الزمني.
- ذكر المصادر المستقى منها البيانات.
- أن توضع الملاحظات الخاصة عن الجدول.

أما هذه الفئات ومن أجل الاختصار فيمكن كتابتها بتحديد بداية الفئات وترك نهايتها لتحديد ضمنا من الفئة التالية لها وفي هذه الحالة تحدد نهاية الفئة الأخيرة كما في الجدول التالي:

#### الفئات المفتوحة:

-55

-59

-63

71-67

وللعلم ان هذا النموذج من الفئات يمكن استخدامه لبيانات كل من الظاهرتين المنفصلة والمتصلة.

ويمكن إيجاد طول الفئة من العلاقة التالية

طول الفئة = الحد الأدنى للفئة اللاحقة - الحد الأدنى للفئة السابقة.

$$- 59 - 55 - 4$$

#### الجدول التكراري المزدوج:

مثال (1-12): الجدول (1-24) يمثل اعداد الطلبة في كلية الهندسة تخصصاتهم وسنواتهم الدراسية.

السنة	التخصص	هندسة مدنية	هندسة معمارية	هندسة كيميائية	المجموع
الأولى		40	30	20	90
الثانية		50	40	15	105
الثالثة		60	20	25	105
الرابعة		50	60	60	170
المجموع		200	150	120	470

### جدول (1 - 24)

\* يتم قبول الطلبة في السنة الاولى بعد امتحان القبول  
المصدر: وزارة التعليم العالي

### 1- 5- 2 العرض الهندسي للبيانات المنفصلة :

- أ) الاعمدة او المستطيلات
- ب) العرض استخدام الصور
- ج) العرض استخدام الدوائر
- د) الخط البياني

### أ- العرض باستخدام المستطيلات (او الاعمدة)

- كثيرا ما نرى من خلال زيارتنا الى المؤسسات المختلفة هذا النوع من التمثيل مما يدل على انتشار هذه الطريقة بشكل واسع ولاستخدام هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:
- نرسم احدائين يلتقيان في نقطة الاصل. يمثل المحور الاول القيمة الوصفية والمحور الثاني القيمة العددية للقيمة المقابلة للقيمة الوصفية.
- اختيار مقياس رسم مناسب يتناسب مع حجم الورقة وحجم القيم العددية.
- رسم مستطيلات ذات قواعد متساوية وتناسب اطوالها مع الاعداد التي يمثلها.
- وكذلك تكون متباعدة بعدا مناسباً.
- عند مقارنة ظاهرتين او اكثر تكون المستطيلات المقارنة متلاصقة.

مثال (1-13): البيانات التالية تمثل اعداد الطلبة في السنة الاولى والثانية والثالثة لطلبة كلية الاداب في جامعة ما حسب تخصصاتهم.

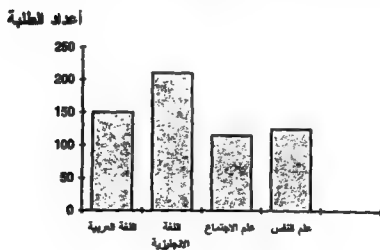
السنة	التخصص	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	علم الاجتماع	علم النفس	المجموع
الاولى		200	150	120	100	570
الثانية		150	210	115	125	600
الثالثة		80	120	80	70	350
المجموع		430	480	315	295	1520

جدول (1-25)

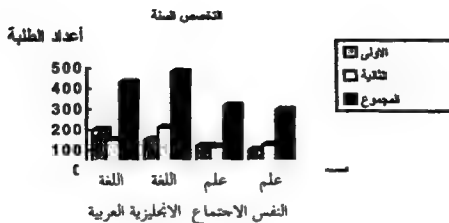
والمطلوب تمثيل هذه البيانات

(1) بالمستطيلات لطلاب السنة الثانية حسب تخصصاتهم.

(2) قارن بالاعمدة بين طلاب السنة الاولى والثانية حسب تخصصاتهم.



شكل (1-6)



**شكل (1-7)**

### ب- العرض بطريقة الصور

في هذه الطريقة تكون الصورة المعيرة عن البيانات المراد عرضها كوسيلة ايضاحية تجذب انتباه المشاهد. مثال على ذلك: عند التعبير عن انتاج شركة مرسيدس للسيارات في سنوات مختلفة فكل صورة لسيارة تمثل 1000 سيارة فتضع عدد من الصور بقدر انتاج الشركة لتلك السنة، وبدلا من صورة سيارة المرسيدس سنضع العلامة التجارية لها.

مثال(1-14): البيانات التالية هي بيانات افتراضية تمثل انتاج احد مصانع شركة المرسيدس في منطقة بافاريا خلال السنوات 1981/1983 والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالصور.

السنة	كمية الانتاج	الصور (صورة واحدة لكل ألف سيارة)
1981	3000	
1982	4000	
1983	6000	

**شكل (1-8)**

### ج) العرض بطريقة الدوائر:

تعتبر هذه الطريقة من افضل الطرق لتمثيل البيانات ذات الصفة المشتركة وتستطيع بواسطتها ان تقارن الاجزاء بعضها البعض ثم الجزء (القطاع الدائري) بالكل (الدائرة) وتببع الخطوات التالية:-

1) نستخرج زاوية قطاع الدائرة من العلاقة التالية:-

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة الجزء المحدد}}{\text{المجموع الكلي للأجزاء}} \times 360^\circ$$

حيث ان 360 هي الزاوية المركزية للدائرة.

2) نقوم برسم دائرة معينة ونرسم عليها نصف قطر.

3) نرسم الزاوية المركزية التي ضلعها الابتدائي نصف القطر والمثلثة بالقطاع.

مثال (1-15): بستان به 1080 شجرة مثمرة موزعة كما في الجدول التالي:-

نوع الشجر	العدد
تفاح	180
احاص	540
عنب	90
دوراق	270
المجموع	1080

جدول (1 - 26)

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

الحل: نجد زوايا القطاع لجميع اصناف الاشجار المثمرة

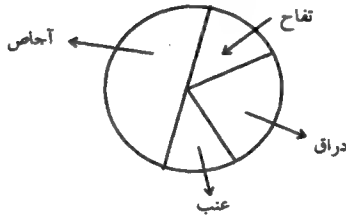
$$\text{زاوية القطاع (التفاح)} = \frac{180}{1080} \times 360 = 60^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (الاجاص)} = \frac{540}{1080} \times 360 = 180^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (عنب)} = \frac{90}{1080} \times 360 = 30^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (دراق)} = \frac{270}{1080} \times 360 = 90^\circ$$

وبمجموع هذه الزوايا يجب ان يساوي 360°



شكل (1 - 9)

#### (د) التمثيل بالخط البياني:

وهو يوضح العلاقة بين ظاهرتين او اكثر بحيث تمثل على المحور الافقي المسميات او الزمن وعلى المحور الراسي قيم الظاهرة مع اختيار مقياس رسم مناسب.

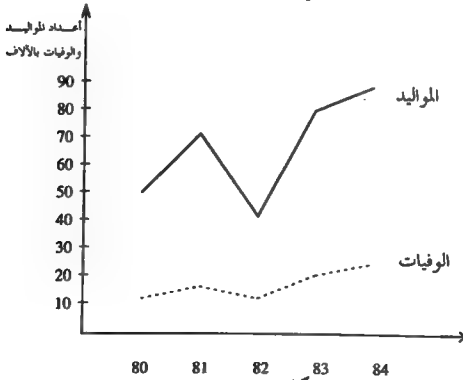
مثال (1-16): البيانات التالية تبين اعداد المواليد والوفيات في احدى البلدان خلال السنوات 1980/1984. مثل هذه البيانات بالخط البياني:

### المواليد والوفيات بالآلاف

السنة	المواليد	الوفيات
1980	50	10
1981	70	12
1982	40	8
1983	80	14
1984	85	16

جدول (1-27)

- الحل: (1) نرصد السنوات التي على المحور الأفقي وقيم الظاهرة على المحور الرأسي.
- (2) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الأفقية السنوات والعمودية قيم الظاهرة.
- (3) نصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم أو خطوط متقطعة.



شكل (1-10)

## 1- 6 : تمثيل الجداول التكرارية :

ويتم ذلك بأحد الأشكال التالية:-

### أ- المدرج التكراري:

**تعريف:** المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات متلاصقة مقامه على محور الفئات، قواعدھا أطوال الفئات وارتفاعاتها تكرار كل فئة وللحصول على هذا المدرج تتبع الخطوات التالية:-

- نرسم محورين متعامدين احدهما يمثل الفئات الفعلية في حالة الفئات المنفصلة والآخر يمثل التكرارات
- نرصد بداية الفئات الفعلية وعندما نصل الى نهاية اخر فئة نرصد حدها الاعلى.
- نقيم مستطيلات متلاصقة قواعدھا الفئات الفعلية وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة.

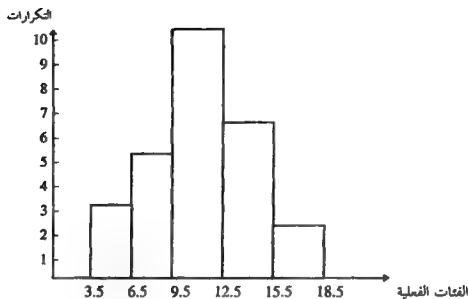
مثال (1-17): مثل الجدول التكراري (1-28) بالمدرج التكراري

الحدود الفعلية	التكرارات	الفئات
3.5 - 6.5	3	4-6
6.5-9.5	5	7-9
9.5-12.5	10	10-12
12.5-15.5	6	13-15
15.5-18.5	2	16-18

جدول(1-28)

**الحل:** بالاستفادة من البيانات السابقة نرسم المدرج ادناه.





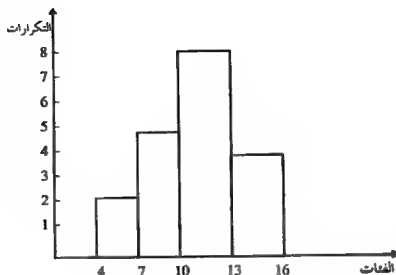
شكل (1-11)

مثال (1-18): مثل الجدول التكراري (1-29) بالمدرج التكراري.

الفئات	التكرارات
4 واقل من 7	2
7 واقل من 10	5
10 واقل من 13	8
13 واقل من 16	4

جدول (1-29)

الحل: في هذا الجدول نستخدم الفئات المتصلة:



شكل (1- 12)

### ب) المصنع التكراري:

يمكن رسم المصنع التكراري للجدول التكرارية بطريقتين.

(1) باستخدام المدرج التكراري.

(2) باستخدام مراكز الفئات.

#### (1) باستخدام المدرج التكراري

في هذه الحالة تتبع الخطوات التالية :-

- إضافة فئة سابقة وفئة لاحقة وتكرار كل منهما صفر الى الجدول التكراري وذلك

لاغلاق المصنع من كلا طرفيه على المحور الأفقي.

- رسم المدرج التكراري حسب الخطوات السابقة.

- ننصف قواعد المستطيلات العليا.

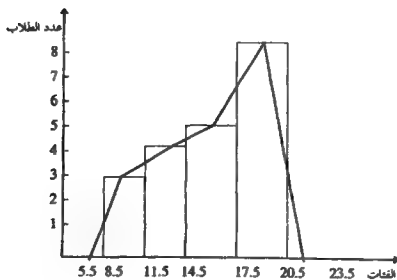
- نصل بين كل نقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم فيكون الشكل الناتج هو المصنع التكراري.

مثال (1-19) : البيانات التالية تمثل علامات 30 طالب من 20 موزعة كما في الجدول التكراري (1-30) والمطلوب رسم المصّلع التكراري باستخدام المدرج التكراري.

فئات العلامات	عدد الطلاب	الفئات الفعلية
8-6	صفر	8.5 - 5.5
11-9	3	11.5-8.5
14-12	4	14.5-11.5
17-15	5	17.5-14.5
20-18	8	20.5-17.5
23-21	صفر	23.5-20.5

جدول (1-30)

الحل: من البيانات السابقة واتباع الخطوات نرسم الشكل (1 - 13)



شكل (1-13)

## (2) رسم المضلع باستخدام مراكز الفئات.

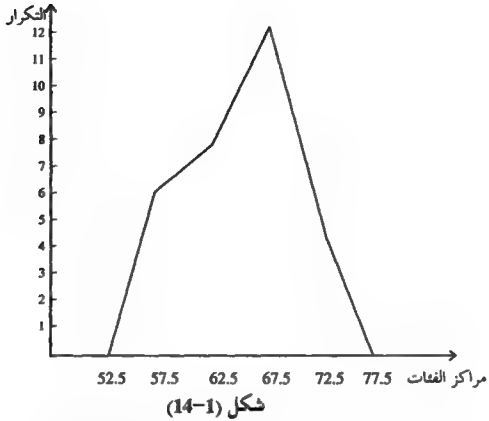
نقوم باتتباع الخطوات التالية:-

- نرسم محورين متعامدين الافقي يمثل مراكز الفئات . والعمودي يمثل التكرارات
- نحدد مركز الفئات .
- نعين النقاط على الرسم البياني حيث كل نقطة مسقطها الاول مركز الفئة والمسقط الثاني التكرار للفئة.
- نصل بين النقاط بشكل متتابعي.
- للحصول على مضلع تكراري مغلق نأخذ مركز فئة سابق بتكرار صفر ومركز فئة لاحق بتكرار صفر أيضاً.

مثال (1-20): البيانات التالية تمثل أوزان 30 طالبا مبنية بالجدول (1-31):-

مراكز الفئات	التكرار	فئات الاوزان
52.5	صفر	-50
57.5	6	-55
62.5	8	-60
67.5	12	-65
72.5	4	-70
77.5	صفر	80-75

جدول (1-31)



ويجدر بنا ان نذكر انه في حالة رسم المضلع التكراري باستخدام المدرج التكراري فان المساحة التي يحصرها المضلع مساوية للمساحة التي يحصرها المدرج التكراري لان المضلع يحذف اجزاء من المدرج ويضيف له اجزاء وهذه أي المحذوفة والمضافة متساوية في المساحة.

ج - المنحنى التكراري لرسم المنحنى التكراري تتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في رسم المضلع التكراري ولكن الفرق بينهما ان الوصل بين النقطة والنقطة التي تليها في المنحنى تكون بخطوط منحنية اما في المضلع بخطوط مستقيمة . وعادة يستخدم المنحنى في الحالات التي تكون فيها البيانات كبيرة الحجم وذات فئات اطوالها صغيرة والمتغير مستمر مثل الزمن، الاطوال، الاوزان... الخ.

د- تمثيل الجداول التكرارية المتجمعة بيانيا.

1- المضلع التكراري المتجمع الصاعد.

2- المضلع التكراري المتجمع الهابط.

مثال(1-12) : الأرباح السنوية بآلاف الدنانير ل 30 محلا من كبرى المحلات التجارية في مدينة ما موزعة كما يلي والمطلوب تمثيل هذا الجدول بالمضلع التكراري المتجمع الصاعد والهابط.

فئات الربح	14-10	19-15	24-20	29-25	34-30
التكرار	0	4	6	15	5

الحل : نكون جدول الحل (1-32).

فئات الربح	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
14-10	صفر	9.5 - 14.5	اقل من 14.5	صفر
19-15	4	14.5-19.5	اقل من 19.5	4
24-20	6	19.5-24.5	اقل من 24.5	10
29-25	15	24.5-29.5	أقل من 29.5	25
34-30	5	29.5-34.5	اقل من 34.5	30

### جدول ( 1 - 32)

ثم نبدأ باتباع خطوات رسم المضلع التكراري الصاعد.

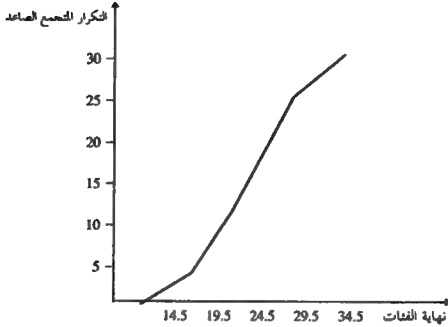
خطوات رسم مضلع تكراري متجمع صاعد

(1) ننشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالجدول السابق.

(2) نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي نهاية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الصاعد.

(3) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية نهاية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الصاعدة.

4- نوصل بخط مستقيم بين النقطة والنقطة التي تليها.



شكل (15-1)

أما المنحنى التكراري المتجمع الصاعد فنتبع في رسمه نفس الخطوات التي اتبعت في رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد والفرق الوحيد هو ان نوصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط منحنى بدلا من الخط المستقيم.

## 2) المضلع التكراري المتجمع الهابط

لرسم المضلع نتبع الخطوات التالية:-

- 1) ننشئ جدول تكراري متجمع هابط.
- 2) نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي بداية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الهابط.
- 3) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية بداية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الهابطة.

(4) نصل بخط مستقيم بين النقاط المتتابعة.

فئات الربح	التكرارات	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
19-15	4	19.5-14.5	أكبر من 14.5	30
24-20	6	24.5-19.5	أكبر من 19.5	26
29-25	15	29.5-24.5	أكبر من 24.5	20
34-30	5	34.5-29.5	أكبر من 29.5	5
39-35	صفر	39.5-34.5	أكبر من 34.5	صفر

#### جدول (1-33)

وعند رسم منحنى متجمع هابط نتبع نفس الخطوات ولكن نصل بين النقاط بالمنحنى.

مثال (1-22): الجدول التالي يمثل فئات الأجور لمائة عامل مبنية بالجدول التالي:

الفئات	-70	-80	-90	-100	110-120	المجموع
التكرار	8	22	40	25	5	100

المطلوب: (1) أوجد مراكز الفئات لهذه الفئات.

- (2) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 80 أو تساويه.
- (3) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 100 أو تساويه.
- (4) أوجد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 90.
- (5) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع.
- (6) أرسم المضلع التكراري لهذا التوزيع .
- (7) أرسم المنحنى التكراري لهذا التوزيع.
- (8) أرسم المنحنى للمتجمع الصاعد لهذا .
- (9) أرسم المنحنى للمتجمع الهابط لهذا التوزيع.

الحل: نكون جدول الحل (1-34):



تكرار هابط	فئات أكبر من $\leq$	تكرار صاعد	فئات أقل من $>$	مركز الفئة	التكرار	فئات الأجنور
100	$70 \leq$	صفر	$70 >$	75	8	-70
92	$80 \leq$	8	$80 >$	85	22	-80
70	$90 \leq$	30	$90 >$	95	40	-90
30	$100 \leq$	70	$100 >$	105	25	-100
5	$110 \leq$	95	$100 >$	115	5	120-110
0	$120 \leq$	100	$120 >$		100	

جدول (1-34)

الحد الأدنى للفئة الأولى + الحد الأعلى للفئة

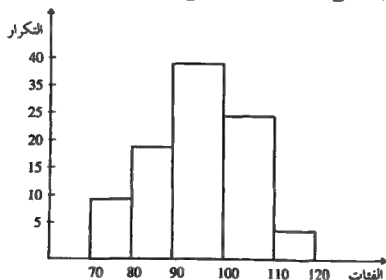
$$(1) \text{ نجد مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة الأولى} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{2}$$

$$(2) \text{ عدد العمال} = 5 + 25 + 40 + 22 = 92$$

$$(3) \text{ عدد العمال} = 25 + 5 = 30$$

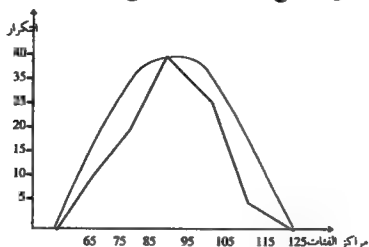
$$(4) \text{ عدد العمال} = 22 + 8 = 30$$

(5) أم المدرج التكراري لهذا التوزيع فهو كما في شكل (1-17).



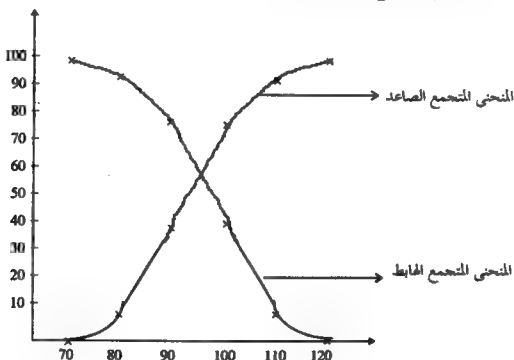
شكل (1 - 17)

(7 + 6) أما المنحنى والمضلع التكراري لهذا التوزيع فهو كما في شكل (18-1).



شكل (18 - 1)

نستنتج من الرسم أن المضلع مفتوح ولجعله مغلقاً نأخذ فئة سابقة وفئة لاحقة بتكرار صفر ثم نصل مع النقاط الجديدة لكي يصبح المضلع مغلقاً.  
(9 + 8) المنحنى المطلوب هو:



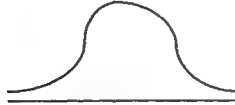
شكل (19 - 1)

## 1-7 أنواع المنحنيات:

1- من حيث الالتواء والتماثل:



شكل (١- ٢١)  
منحنى متماثل حول الوسط

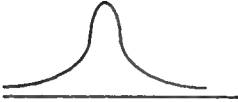


شكل (١- 20)  
منحنى ملتف نحو اليمين

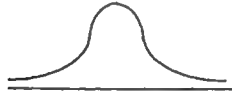


شكل (١- 22)  
منحنى ملتف نحو اليسار

2) من حيث التدبيب :



شكل (١- ٢٤)  
منحنى ملتب



شكل (١- ٢٣)  
منحنى متماثل



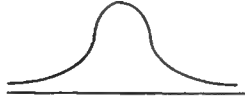
شكل (١- ٢٥)  
منحنى منقطع

(3) من حيث عدد القمم:



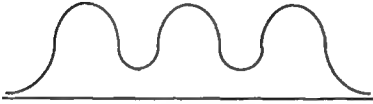
شكل (١ - ٢٧)

منحني لثاني القمة



شكل (١ - ٢٦)

منحني وحيد القمة



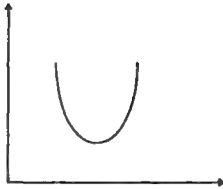
شكل (١ - ٢٨)

منحني متعدد القمم

## 8-1 أشكال المنحنيات:

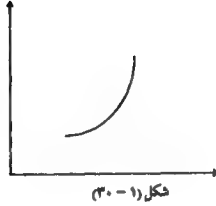
تتمثل أشكال المنحنيات بالأشكال والتسميات التالية:

1- الشكل النوني.



شكل (١ - ٢٩)

## 2- الشكل اللامي.



### أمثلة إضافية:

مثال (1-23): في الجدول التكراري التالي توزيع 500 موظف حسب الأجر الشهري بالدينار، بناءً على بيانات العينة العشوائية المختارة من مجتمع العاملين في إحدى الشركات. كما هو مبين في الجدول (1-35)

الفئات	-0	-100	-250	500-1000
عدد العمال	200	150	125	25

جدول (1-35)

المطلوب: (1) تسمية جدول تكراري.

(2) إيجاد جدول التكرار المعدل.

(3) رسم المضلع التكراري والمنحنى التكراري لجدول التكرار المعدل.

(4) تسمية المنحنى الناتج من حيث التماثل.

(5) حساب نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن 75 دينار

(6) حساب نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 300 دينار

(7) حساب نسبة العمال الذين تقع أجورهم بين 150 دينار، 300 دينار.

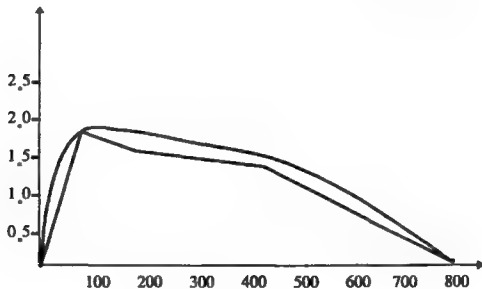
الحل: 1- نكون جدول الحل (1-36)

فئات الدخل	عدد العمال	التكرار المعدل كثـر	مراكز الفئات مـر	كثـر مـر	فئات أقل من	التكرار المعدل التجميعي
-0	200	2	50	100	100 >	2
-100	150	1	175	175	250 >	3
-250	125	0.5	375	187.5	500 >	3.50
1000-500	25	0.05	750	37.5	1000 >	3.55
	500	3.55		500		

جدول (1-36)

$$\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}} = \text{التكرار المعدل} \quad (2)$$

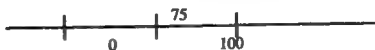
(3) بناءً على النتائج في 2 المطلوب رسم المصّلع التكراري والمنحنى التكراري كما في شكل (01-31)



شكل (1-31)

(4) غير متماثل وانما ملتو نحو اليمين.

(5) لحساب نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 75 دينار: نجد عدد العمال ضمن الفترة المطلوبة كما هي موضح بالشكل:



شكل (1-32)

طول فئة التكرار:

$$200 \leftarrow 100$$

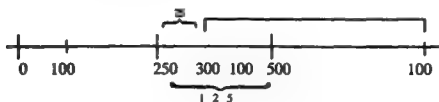
$$75 \leftarrow \text{س} \quad \text{وبالضرب التبادلي} \quad \frac{200}{\text{س}} = \frac{100}{75}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{200 \times 75}{100} = 150 \text{ موظف}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{150}{500} = 75 \text{ نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 75}$$

(6) لحساب نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن (300) دينار.

نجد أولاً تكرار العمال ضمن هذه الفترة وذلك بالتمثيل على خط الأعداد والفترات.



شكل (1-33)

طول فئة التكرار:

$$125 \leftarrow 250$$

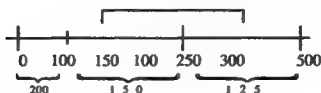
$$50 \leftarrow \text{س} \quad \therefore \text{س} = \frac{50 \times 125}{250} = 25 \text{ موظف}$$

تكرار الفئة المطلوبة =  $125 = 25 + 100$

$$\frac{1}{4} = \frac{125}{500} = 300 \text{ نسبة العمال الذين تزيد اجورهم عن } 300$$

(7) لحساب نسبة الذين تتراوح اجورهم بين 150، 300

نجد عدد العمال للفترة المطلوبة في شكل ( 1 - 34 )



شكل (1-34)

طول فئة التكرار:

$$150 \leftarrow 150$$

$$50 \leftarrow 50 \quad \therefore \text{س} = \frac{125 \times 50}{250} = 25 \text{ موظف}$$

تكرار الفئة المطلوبة =  $125 = 25 + 100$

$$\frac{1}{4} = \frac{125}{500} = \text{نسبة العمال}$$

مثال (1-24): البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا مينة كما يلي :

67	59	48	38	47	51	67	72	69	48
59	41	62	41	42	32	42	38	35	21
64	43	79	55	27	67	61	32	47	35
43	58	62	69	29	55	65	54	51	27
31	62	55	65	51	53	67	69	55	42

جدول ( 1 - 37 )

المطلوب: (1) تكوين جدول تكراري

(2) تحديد مراكز الفئات

(3) التكرار النسبي والمتوي



- (4) تمثيل البيانات بواسطة المدرج التكراري  
 (5) تمثيل البيانات بواسطة المنحنى التكراري  
 (6) تمثيل البيانات بواسطة المضلع التكراري  
 (7) عدد الطلاب الذين اوزانهم تقع بين 53-69.  
 (8) عدد الطلاب الذين تزيد اوزانهم عن 40 كغم  
 (9) عدد الطلاب الذين تقل اوزانهم عن 45 كغم

الحل: (1) لتكوين جدول التكرار

(1) نحدد المدى = أعلى قيمة - ادنى قيمة = 1-79 = 21+1-58 = 59.

وليكن عدد الفئات = 6 حيث أن  $5 \leq \text{عدد الفئات} \leq 10$

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{59}{6} = 9.9 \approx 10$$

ثم نبدأ بتكوين الجدول (1-37):

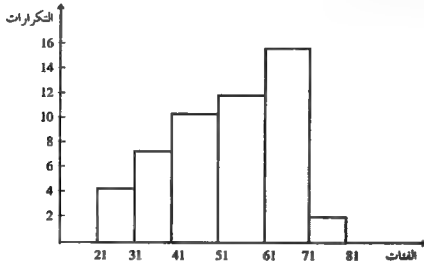
الصفات	التكرار	مركز الفئة	التكرار النسبي	التكرار النسبي
-21	4	26	$\frac{4}{50}$	0.08
-31	7	36	$\frac{7}{50}$	0.14
-41	11	46	$\frac{11}{50}$	0.22
-51	12	56	$\frac{12}{50}$	0.24
-61	14	66	$\frac{14}{50}$	0.28
81 - 71	2	76	$\frac{2}{50}$	0.04
المجموع	50		$\frac{50}{50}$	1.00

جدول (1 - 37)

$$(2) \text{ مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفترة الأولى} + \text{الحد الأدنى للفترة الثانية}}{2} = \frac{31+21}{2} = 26$$

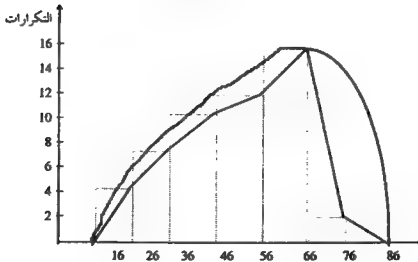
$$(3) \text{ التكرار النسبي للفترة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$$

(4) المدرج التكراري: هو عبارة عن مستطيلات متلاصقة قواعدا هي الفئات وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة. وتمثيل البيانات بالمدرج التكراري كما في شكل (1-35)



شكل (1 - 35)

(5) المنحنى التكراري كما هو موضح في الشكل (1-36)



شكل (1 - 36)

(6) المضلع التكراري كما هو موضح في الشكل (1-36).

(7) نجد عدد الطلاب من الشكل (1-37):



شكل (1-37)

$$12 \leftarrow 10$$

$$2.5 \approx 2.4 = \frac{12 \times 2}{10} = \therefore \text{س} \leftarrow 2$$

$$14 \leftarrow 10$$

$$11 \approx 11.2 = \frac{14 \times 8}{10} = \therefore \text{س} \leftarrow 8$$

$\therefore$  عدد الطلاب الذين تتراوح أوزانهم بين 53، 69 هو  $21 = 11 + 10$  طالب

(8) نجد عدد الطلاب الفترة المطلوبة كما في الشكل (1-38):



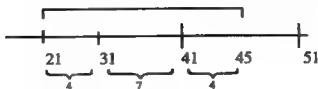
شكل (1-38)

$$7 \leftarrow 10$$

$$6 \approx 6.3 = \frac{7 \times 9}{10} = \therefore \text{س} \leftarrow 9$$

$$40 = 2 + 14 + 12 + 11 + 1 = \text{عدد الطلاب}$$

9) نجد عدد الطلاب للفترة المطلوبة كما في الشكل (1-39):



شكل (1-39)

$$11 \leftarrow 10$$

$$4 \approx 4.4 = \frac{11 \times 4}{10} = \therefore \text{س} \leftarrow 4$$

عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن 45 = 4 + 7 + 4 = 15 طالب

## تمارين عامة على الفصل الأول

س1- إذا كانت مراكز الفئات للبيانات المبوبة في جدول تكراري كالتالي:-

32، 35، 38، 41، 44

أوجد مايلي:

(1) طول الفئة.

(2) الفئات الفعلية للتوزيع.

(3) فئات التوزيع.

س2 :- البيانات التالية تمثل عدد أمتار النسيج المصنوعة في 30 مصنعا ' للنسيج خلال

اسبوع بآلاف الأمتار.

40	59	46	57	49	40
44	39	47	58	51	39
56	52	61	41	53	48
61	56	62	60	55	42
63	43	63	43	54	44

أوجد ما يلي:-

(1) مبتدئا بالعدد 39 شكل جدولا تكراريا ذات فئات منفصلة وطول كل فئة

5 وحدات.

(2) كم عدد فئات الجدول

(3) ارسم مدرجا تكراري.

(4) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مركز الفئات.

(5) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.

(6) اوجد التكرار النسبي لهذا التوزيع.

(7) اوجد التكرار المتوي لهذا التوزيع.

- (8) كم مصنعا انتج اقل من 54 ألف متر.
- (9) كم مصنعا انتج اكثر من 48 ألف متر.
- (10) مبتدئا بالعدد 39 كون جدولا تكراريا اذا فئات بأطوال 4 وحدات شريطة أن تكون الفئات متصلة.
- س3:- البيانات التالية تمثل اوزان 40 رجلا لاقرب كغم.

65	59	72	63	72	69	62	60
62	66	73	75	65	75	63	61
77	68	74	61	66	74	67	59
74	69	62	63	72	77	68	7
68	70	60	64	73	71	64	76

اوجد ما يلي:

- (1) مبتدئا بالعدد 59 كون جدولا تكراريا ذا فئات بطول 3 وحدات شريطة أن تكون هذه الفئات هي فئات متصلة وكم عدد هذه الفئات.
- (2) ارسم مدرجا تكراريا.
- (3) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مراكز الفئات.
- (4) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.
- (5) اوجد التكرار النسبي لهذه التوزيع.
- (6) اوجد التكرار المثوي لهذا التوزيع.
- (7) كم عدد الذين تزيد اوزانهم عن 68 كغم أو تساوي 68 كغم.
- (8) كم عدد الذين تقل اوزانهم عن 68 كغم.
- (9) مبتدئا بالعدد 58 كون جدولا تكراريا لفئات متصلة ويطول 4 وحدات.

س4:- كانت النتائج النهائية السنوية لاحدى المدارس الثانوية كما هي في الجدول التالي:-

النسبة المئوية	فئات الطلاب
65%	الناجحون
10%	الراسبون
5%	المفصولون
20%	حاملو المواد

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

س5: البيانات التالية تمثل اعداد الخريجين لاحدى الكليات في احد الأعوام الدراسية حسب التخصص والجنس

التخصص	الذكور	الإناث	المجموع
كمبيوتر	80	40	120
رياضيات	60	30	90
اجتماعيات	40	20	60
لغة عربية	100	60	160

والمطلوب ما يلي:-

- 1- قارن بين مختلف التخصصات بواسطة الأعمدة.
  - 2- مثل كل تخصص على حدة بالقطاع الدائري ثم مثل جميع التخصصات في دائرة واحدة.
  - 3- مثل التخصصات بالأعمدة دون التطرق إلى الجنس.
  - 4- مثل هذه البيانات بالخط البياني.
- س6:- البيانات التالية تمثل الدخل الكلي لاحدى المحافظات خلال الأعوام 1980/1984.
- قارن بين هاتين الظاهرتين عن طريق تمثيلها بالخط البياني:-

### جدول الدخل الكلي والاتفاق الكلي بآلاف الدنانير

الاتفاق الكلي	الدخل الكلي	السنوات
130	190	1980
80	160	1981
140	210	1982
150	230	1983
135	200	1984

س7:- عرف ما يلي:-

علم الإحصاء، علم الإحصاء الوصفي، علم الإحصاء التحليلي، المصادر التاريخية للمعلومات، المصادر الميدانية للمعلومات، الاستمارة الإحصائية، كشف البحث، صحيفة الاستبيان، طريقة المسح الشامل، العينة، العينة العمدية، العينة العشوائية، تبويب البيانات، التوزيع التكراري، الجدول التكراري، الفئة، التكرار النسبي، التكرار المثوي، الجداول المقفلة، الجداول المفتوحة، الجدول المنظم، الجدول غير المنظم، الفئات المنفصلة، الفئات المتصلة، المدرج التكراري.

س8:- فيما يلي الجدول التكراري التجميعي لتوزيع الاجر الاسبوعي (بالدينار) لعمال مصنع ما عددهم "144" عاملاً.

التكرار التجميعي	اقل من
28	4
58	10
68	15
84	23
119	30
144	40



**المطلوب:**

1- رسم المنحنى التجميعي الصاعد والمنحنى التجميعي الهابط.

2- ما هي أحداثيات نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط.

3- بناءً على المعلومات الموجودة في الجدول السابق:

اختيار العينة العشوائية المناسبة بكسر المعاينة (12/1)

س9: من المعلوم أن توزيع الطلبة المتخصصين في كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية في

الأعوام الدراسية 81/80 و 82/81 كما هو مبين في الجدول التالي:

التخصص/ العام الدراسي	1981/1980	1982/1981
الاقتصاد والاحصاء	130	245
ادارة الاعمال	350	415
الادارة العامة	180	366
العلوم السياسية	60	122
المجموع	1000	1500

**المطلوب:-**

1- ما هو نوع (أو أنواع) التصنيف الذي أدى الى تكوين هذا الجدول .

2- تمثيل البيانات الموجودة في الجدول.

أ- بطريقة الأعمدة (المستطيلات) المجزئة.

ب- بطريقة الدوائر المقسمة الى قطاعات.

3- اختيار عينة عشوائية مناسبة بكسر المعاينة (0.02) من بين طلبة 81/80

س11:- فيما يلي الجدول التكراري المتجمع الصاعد لعينة مؤلفة من (50) طالباً

ناجحاً موزعة حسب علاماتهم في مساق الاحصاء (101).

أقل من	أقل من 60	أقل من 70	أقل من 80	أقل من 90	أقل من 100
التكرار المتجمع	8	20	40	47	50

المطلوب :1) تكوين الجدول التكراري الأصلي

2) تكوين الجدول التكراري النسبي

3) رسم المنحنى المتجمع الصاعد.

س12: يبلغ عدد الطلبة في كلية الآداب (1000) طالباً من بينهم 600 من الإناث.

المطلوب اختيار العينة العشوائية المثلثة المناسبة بكسر المعينة 0.020 وذلك من أجل تشكيل وفد طلابي، متبعا الخطوات بالترتيب مع ذكر هذه الخطوات.

س13:- فيما يلي جدول تكراري لتوزيع عينة مؤلفة من 60 طالبا حسب علاماتهم

فئات الطلاب	-40	-50	-60	-70	-80
عدد الطلبة	8	12	20	16	4

المطلوب:- 1. رسم المنحنى التجميعي الصاعد

2. حساب نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 76.

3. حساب العلامة التي حصل على أعلى منها 10٪ من الطلبة.

س14:- فيما يلي جدول تكراري يبين توزيع 50 طالبا حسب معدلاتهم التراكمية.

فئات العلامات	-35	-60	-67	-76	-84
عدد الطلبة	2	21	18	8	1

المطلوب إيجاد:-

1- الجدول التكراري المعدل .

2- نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين (65و75)

3- إذا اختير ما نسبته 15٪ من الطلبة للدراسات العليا ما هي أدنى علامة تؤهل الطالب للحصول على هذه الفرصة.

4- رسم المضلع التكراري، وبيان تمثاله.

## الفصل الثاني

### مقاييس النزعة المركزية

#### مقدمة:

ان كلمة النزعة المركزية تعني الرغبة في التركز والتكثف نحو رقم معين وهذا هو محور دراستنا في هذه الوحدة وكل الذي نوده كيفية حساب هذه القيمة لتمثل باقي القيم تمثيلاً سليماً والتي تعتبر مقياساً لباقي القيم وقد وجد باحثوا الاحصاء العديد من هذه المقاييس أهمها:

(1) الوسط الحسابي (2) الوسيط (3) النوال

هذا وستناول كل مقياس على حدى بنوع من التفصيل من حيث الخصائص وطرق ايجاده.

#### (1-2) الوسط الحسابي:

تعريف: الوسط الحسابي لمجموعة مشاهدات هو مجموع هذه المشاهدات مقسوماً على عددها ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية:

..... (1 - 2)

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}}$$

## 2-1-1) كيفية إيجاد الوسط الحسابي :

أ- إذا كانت لدينا البيانات غير مبوبة. وهذه تكون بصورتين.

(1) البيانات غير مبوبة ومفردة (غير متكررة).

تعريف: إذا كان لدينا قيم المشاهدات  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ ، فإن الوسط

الحسابي لهذه المشاهدات  $\bar{s}$  هو

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{n} \quad \dots \dots \dots (2-2)$$

أو باستخدام رمز المجموع فإننا نكتب المتوسط الحسابي على الصورة

$$\bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^n s_r}{n} \quad \dots \dots \dots (3-2)$$

حيث  $r=1, 2, \dots, n$ .

مثال (2-1) : إذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

3، 5، 7، 11، 13، 21 والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات.

الحل: باستخدام العلاقة أعلاه فإن:

$$\bar{s} = \frac{3+5+7+11+13+21}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

مثال (2-2): إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات 84 وكان مجموع هذه المشاهدات 420 أوجد عدد هذه المشاهدات.

الحل: من العلاقة الوسط الحسابي =  $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$$84 = \frac{420}{n} \Leftarrow n = \frac{420 \times 1}{84} = 5 \text{ مشاهدات}$$

(2) اذا كانت المشاهدات متكررة في جدول تكراري فاننا نجد الوسط الحسابي (الوسط الحسابي الموزون او المرجح)

تعريف: اذا كان لدينا قيم المشاهدات  $s_1, s_2, \dots, s_n$  وتكراراتها المقابلة على التوالي  $k_1, k_2, \dots, k_n$ ، كثر فان الوسط الحسابي يكون

$$\bar{s} = \frac{s_1 k_1 + s_2 k_2 + \dots + s_n k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} \dots\dots\dots (2 - 4)$$

او باستخدام صيغة المجموع

$$\bar{s} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i \times k_i}{\sum_{i=1}^n s_i} \dots\dots\dots (2 - 5)$$

مثال (2-3): في شعبة ادارة الاعمال اعطى مئة طالب امتحان احصاء من عشر علامات وكان توزيع الطلاب حسب العلامات التي حصلوا عليها موزعة بالجدول (2-1):

العلامة	10	9	8	7	6	5	4
عدد الطلاب	5	16	21	35	13	8	2

جدول (2 - 1)

المطلوب: إيجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

الحل: نلجأ لحل مثل هذه المسائل اما بتكوين جدول الحل (2 - 2) وباستخدام العلاقة المعطاة:

التكرار كـ	العلامة سـ	سـ كـ
5	10	50
16	9	144
21	8	168
35	7	245
13	6	78
8	5	40
2	4	8
100		733

جدول (2-2)

$$\bar{س} = \frac{733}{100} = 7.33$$

$$\bar{س} = \frac{\sum سـ \times كـ}{\sum كـ}$$

او نجد الوسط الحسابي من العلاقة التالية مباشرة  $\bar{س} =$

دون استخدام الجدول أعلاه على النحو التالي:

$$\bar{س} = \frac{2 \times 4 + 8 \times 5 + 13 \times 6 + 35 \times 7 + 21 \times 8 + 16 \times 9 + 5 \times 10}{2 + 8 + 13 + 35 + 21 + 16 + 5}$$

$$7.33 = \frac{733}{100} = \frac{8 + 40 + 78 + 245 + 168 + 144 + 50}{100} =$$

(ب) إيجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة:

هناك عدة طرق لإيجاد الوسط الحسابي وسوف نستعرض في كتابنا هذا اهم الطرق المستخدمة.

(1) طريقة استخدام التكرارات ومراكز الفئات او طريقة القانون العام: في هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات سر.

- نجد مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها أي  $\sum x \cdot ك$ .

- نجد مجموع التكرارات أي  $\sum ك$

- ونستخدم العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot ك_i}{\sum_{i=1}^n ك_i} \dots\dots\dots (2 - 6)$$

مثال (2-4): اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات المبوبة بالجدول (2-3) بالطريقة المباشرة.

الفئات	24-20	29-25	34-30	39-35	44-40	المجموع
التكرار	7	13	21	6	3	50

جدول (2 - 3)

الحل: نشكل الجدول (2 - 4) والذي يحتوي على جميع الحسابات المطلوبة لهذه الطريقة.

الفئات	التكرار $ك$	مراكز الفئات $سر$	$سر \times ك$
24 - 20	7	22	154 = 22 × 7
29 - 25	13	27	351 = 27 × 13
34 - 30	21	32	672 = 32 × 21
39 - 35	6	37	222 = 37 × 6
44 - 40	3	42	126 = 42 × 3
المجموع	50		1525

جدول (2 - 4)

وبتطبيق العلاقة (2-6).

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \times K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

$$305 = \frac{1525}{50} = \bar{m}$$

فاننا نجد ان  $\bar{m} = 305$

(2) إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي :

لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات  $m_i$ .
- نأخذ أي مركز فئة كوسط فرضي وغالباً ما يكون مركز الفئة المقابلة للأكثر تكراراً ويرمز له بالرمز (أ).
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ونرمز لها بالرمز  $h_i$ .
- نجد مجموع حاصل الضرب أي  $\sum_{i=1}^n h_i \times K_i$ .
- نجد الوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{m} = أ + \frac{\sum_{i=1}^n h_i \times K_i}{\sum_{i=1}^n K_i} \quad \dots\dots\dots (2 - 7)$$



مثال (5-2) : اذا كان لدينا البيانات التالية والمبوبة بالجدول (2 - 5):

الفئات	-30	-40	-50	-60	-70	المجموع
التكرار ك <sub>ر</sub>	2	9	21	11	7	50

جدول (2 - 5)

المطلوب إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

الحل: نكون الجدول (2 - 6) والمتضمن الحسابات الواردة في الخطوات السابقة:

الفئات	التكرار	مراكز الفئات	ح <sub>ر</sub> - أ	ح <sub>ر</sub> × ك <sub>ر</sub>
-30	2	35	20 - 55 - 35	40 - -20 - × 2
-40	9	45	10 - 55 - 45	90 - -10 - × 9
-50	21	55	0 - 55 - 55	0 - 0 × 21
-60	11	65	10 - 55 - 65	110 - 10 × 11
-70	7	75	20 - 55 - 75	140 - 20 × 7
المجموع	50			120

جدول (2 - 6)

وليكن الوسط الفرضي أ=55 وباستخدام العلاقة أدناه فان:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ح}_r \times \text{ك}_r}{\sum_{i=1}^n \text{ك}_r} + \bar{A}$$

$$\text{نجد ان } \bar{X} = 55 + \frac{120}{50} = 55 + 24 = 57.4$$

### (3) إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات سر
- نأخذ وسط فرضي وليكن أ والمقابل للاكثر تكراراً من مراكز الفئات
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي أي ح
- نجد الانحرافات المختصرة ولتكن  $\bar{X}$   $\bar{X} = \frac{\sum X}{L} = \frac{\sum X}{\text{طول الفئة}}$
- نجد حاصل ضرب  $\bar{X} \times K$  ر
- نجد مجموع حاصل ضرب  $\bar{X} \times K$  ر
- نجد المتوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{X} = A + \frac{\sum \bar{X} \times K}{\sum K} \times L \quad \text{..... (2-8)}$$

مثال (2-6): البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالباً موزعين بالجدول (2-7).

الفئات	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
الطلاب	7	13	25	3	2	50

الجدول (2-7)

المطلوب: إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-8) والمتضمن جميع الحسابات الواردة في الخطوات السابقة.

الانحرافات المختصرة $\bar{x}$	الانحرافات عن الوسط الفرضي $\bar{x}$	مراكز الفئات $س$	التكرار ك	الفئات
$14 - 2 \times 7$	$2 - \frac{10}{5}$	$10 - 62 - 52$	52	7
$13 - 1 \times 13$	$1 - \frac{5}{5}$	$5 - 62 - 57$	57	13
$0 - 0 \times 25$	$0 - \frac{0}{5}$	$0 - 62 - 62$	62	25
$3 - 1 \times 3$	$1 - \frac{5}{5}$	$5 - 62 - 67$	67	3
$4 - 2 \times 2$	$2 - \frac{10}{5}$	$10 - 62 - 72$	72	2
20-			50	المجموع

جدول (2 - 8)

وليكن الوسط الفرضي  $\bar{A} = 62$

$$\text{وتطبيق العلاقة } \bar{S} = \bar{A} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x} \times \text{ك}}{\sum_{i=1}^n \text{ك}} \times \text{ل}$$

$$\text{نجد ان } \bar{S} = 62 - 50 \times \frac{20}{5} = 62 - 20 = 42$$

مثال (2-7): البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبوبة بالجدول (2-9):

الفئات	-30	-35	-40	-45	-50	المجموع
التكرار	7	17	36	29	11	100

جدول (2 - 9)

المطلوب إيجاد:

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة.

ب) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي.

ج) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-10) والمتضمن جميع الحسابات المطلوبة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار	مراكز الفئات	مركز $\times$ تكر	ح = مركز - مركز	ح $\times$ تكر	ح = $\frac{\text{مركز}}{\text{تكر}}$	ح $\times$ تكر
-30	7	32.5	227.5	10 - 42.5 - 32.5	70 - 10 $\times$ 7	$2 - \frac{10 - 5}{5}$	14 - 2 $\times$ 7
-35	17	37.5	637.5	5 - 42.5 - 37.5	85 - 5 $\times$ 17	$1 - \frac{5 - 5}{5}$	17 - 1 $\times$ 17
-40	36	42.5	1530	0 - 42.5 - 42.5	0 - 0 $\times$ 36	$0 - \frac{0 - 5}{5}$	0 - 0 $\times$ 36
-45	29	47.5	1377.5	5 - 42.5 - 47.5	145 - 5 $\times$ 29	$1 - \frac{5 - 5}{5}$	29 - 1 $\times$ 29
-50	11	52.5	577.5	10 - 42.5 - 52.5	110 - 10 $\times$ 11	$2 - \frac{10 - 5}{5}$	22 - 2 $\times$ 11
المجموع	100		4350		100		20

جدول (2 - 10)

ليكن الوسط الفرضي  $\bar{A} = 42.5$

$$\bar{M} = \frac{\sum_{j=1}^n \text{مر} \times \text{كر}}{\sum_{j=1}^n \text{كر}}$$

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة

$$\bar{M} = \frac{4350}{100} = 43.50$$

ب) الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي:

$$\bar{M} = \bar{A} + \frac{\sum_{j=1}^n \text{مر} \times \text{كر}}{\sum_{j=1}^n \text{كر}}$$

$$\bar{M} = 42.5 + \frac{100}{100} = 43.5$$

ج) إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي أ .

$$\bar{M} = \bar{A} + \frac{\sum_{j=1}^n \text{ح} \times \text{كر}}{\sum_{j=1}^n \text{كر}} \times \text{ل}$$

$$\bar{M} = 42.5 + 5 \times \frac{20}{100} = 43.5$$

نلاحظ ان الوسط الحسابي في الطرق الثلاث متساوية.

## 2-1-2) الوسط الحسابي المرجح:

لعل هذا المفهوم يفيد كثيراً في حالات دمج مجموعات ذات أحجام عينات

مختلفة ولا بد من التوقف عند هذا المفهوم لتتناول هذا التعريف.

تعريف: اذا كان لدينا مجموعة من العينات أحجامها  $n_1, n_2, \dots, n_r$  وقيمنا بعملية

دمج هذه العينات المختلفة وأردنا إيجاد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج  
فاننا نجد الوسط الحسابي للعينات بعد الدمج (الوسط الحسابي المرجح) من العلاقة  
التالية:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + \dots + x_r \times n_r}{n_1 + n_2 + \dots + n_r} \dots (2-9)$$

حيث أن  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$  هي الأوساط الحسابية لكل عينة.

مثال: اذا كان لدينا ثلاثة عينات احجامها على التوالي  $n_1 = 15, n_2 = 20, n_3 = 25$   
وكانت اوساطها الحسابية  $\bar{x}_1 = 45, \bar{x}_2 = 75, \bar{x}_3 = 60$  ودمجت العينات  
الثلاث معاً أوجد الوسط الحسابي المرجح للعينات بعد الدمج.

$$\begin{aligned} \text{الحل: } \bar{x} &= \frac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + x_3 \times n_3}{n_1 + n_2 + n_3} \\ &= \frac{45 \times 15 + 75 \times 20 + 60 \times 25}{15 + 20 + 25} \\ &= \frac{1500 + 1500 + 675}{60} = \frac{3675}{60} = 61.25 \end{aligned}$$

### 2-1-3 خصائص الوسط الحسابي:

1) مجموع انحرافات للملاحظات عن الوسط الحسابي = صفر.

مثال (2-8): اذا كان لدينا قيم المشاهدات 17, 21, 15, 27, 20، أثبت أن مجموع  
انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي يساوي صفراً.

$$\text{الحل: } \bar{x} = \frac{17 + 21 + 15 + 27 + 20}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

نجد الانحرافات للملاحظات عن الوسط الحسابي:

$$ح_1 = م_1 - \bar{م} = 3 - 20 = -17$$

$$ح_2 = م_2 - \bar{م} = 1 + 20 = 21$$

$$ح_3 = م_3 - \bar{م} = 5 - 20 = -15$$

$$ح_4 = م_4 - \bar{م} = 7 + 20 = 27$$

$$ح_5 = م_5 - \bar{م} = 0 - 20 = -20$$

$$\sum ح = -17 + 21 - 15 + 27 - 20 = 7$$

وهذا ما يؤكد صحة الخاصية بأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = صفر.

(2) الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال (2-9): أوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات التالية.

$$2500، 40، 50، 13، 37$$

$$\text{الحل: } \bar{م} = \frac{2500 + 40 + 50 + 13 + 37}{5} = \frac{2640}{5} = 528$$

وهذا العدد بعيد كل البعد عن باقي قيم المشاهدات وهذا من جراء القيمة

المتطرفة 2500 لكن لو استبعدنا القيمة المتطرفة فنلاحظ ان الوسط الحسابي سيصبح واقعياً.

مثال (2-10): أوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات اعلاه بدون القيمة المتطرفة.

$$\text{الحل: } \bar{م} = \frac{40 + 50 + 13 + 37}{4} = \frac{140}{4} = 35$$

وهذه القيمة متقاربة مع قيم المشاهدات الاخرى.

3) يأخذ كل قيم للملاحظات ذات العلاقة في الاعتبار وهذا واضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$\frac{س_1 + س_2 + ..... + س_n}{n} = \bar{س}$$

مثال (2-11): أوجد المتوسط الحسابي لعلامات خمسة طلاب في امتحان الاحصاء

كانت كما يلي 8،0،6،9،7

$$\text{الحل: نجد } \bar{س} = \frac{8+0+6+9+7}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

4) المتوسط الحسابي هو متوسط لقيم المشاهدات في المجموعة وليس متوسط لترتيب القيم كما هو الحال في الوسيط.

5) مجموع مربعات الانحرافات القيم عن وسطها أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة أخرى.

مثال (2-12): أ) أوجد مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي لقيم المشاهدات 3،5،9،13،10 ثم أوجد مربع الانحرافات عن القيمة 13.

وقارن بين النتيجة الأولى والثانية لتثبت صحة الخاصية أعلاه.

$$\text{الحل: نجد: } \bar{س} = \frac{10+13+9+5+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

نجد:

$$س_1 - \bar{س} = 5 - 8 = -3 \quad ، \quad ح_1^2 = 25$$

$$س_2 - \bar{س} = 9 - 8 = 1 \quad ، \quad ح_2^2 = 9$$

$$س_3 - \bar{س} = 13 - 8 = 5 \quad ، \quad ح_3^2 = 25$$



$$ح_4 = س_4 - س_3 = 13 - 8 = 5 ، \quad ح_4^2 = 25$$

$$ح_5 = س_5 - س_4 = 10 - 8 = 2 ، \quad ح_5^2 = 4$$

$$\sum ح_r^2 = 64$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن الملاحظة 13

$$ح_1 = س_1 - 13 = 3 - 13 = -10 ، \quad ح_1^2 = 100$$

$$ح_2 = س_2 - 13 = 5 - 13 = -8 ، \quad ح_2^2 = 64$$

$$ح_3 = س_3 - 13 = 9 - 13 = -4 ، \quad ح_3^2 = 16$$

$$ح_4 = س_4 - 13 = 13 - 13 = 0 ، \quad ح_4^2 = 0$$

$$ح_5 = س_5 - 13 = 10 - 13 = -3 ، \quad ح_5^2 = 9$$

$$\sum ح_r^2 = 150$$

نلاحظ ان مجموع الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي اقل من

مجموع انحرافات القيم عن اية قيمة اخرى لأن  $150 > 64$  .

(5) عند اضافة عدد ثابت الى جميع قيم المشاهدات فاننا نضيف هذا العدد الى الوسط الحسابي.

(6) عند ضرب عدد ثابت في جميع قيم المشاهدات فاننا نضرب الوسط الحسابي في نفس القيمة.

## (2-2) الوسيط:

نبدأ التحدث عن مفهوم الوسيط باعطاء التعريف التالي.

**تعريف:** الوسيط هو عبارة عن القيمة الاوسطية لمجموعة من القيم رُتبت تصاعدياً أو تنازلياً في حالة اذا كان عدد القيم فردية ومتوسط القيمتين الأوسطتين. اذا كان عدد القيم زوجياً.



هذا التمثيل اذا كان عدد القيم مفردة والترتيب تصاعدياً.



وهذا التمثيل إذا كان عدد القيم زوجياً.

## كيفية ايجاد الوسيط:

### (أ) حساب الوسيط من البيانات غير المبوبة.

يوجد حالتان لحساب الوسيط من هذه البيانات.

1- اذا كان عدد القيم غير المبوبة فردياً.

اذا كان لدينا قيم المشاهدات  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  وكانت  $n$  فردية والحساب الوسيط تتبع الخطوات التالية.

- تُرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ولكن ستأول في كتابتها الترتيب التصاعدي.

- نجد ترتيب الوسيط من العلاقة:

$$(10-2) \dots\dots\dots \boxed{\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1+n}{2}}$$

حيث ن عدد القيم.

نجد قيمة الوسيط وهي القيمة المناظرة لترتيب الوسيط.

مثال (2-13) : اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 3، 21، 5، 9، 11، 7، 14. اوجد الوسيط لهذه القيم.

الحل: نتبع الخطوات اعلاه

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً كما في الجدول (2 - 11)

القيمة	3	5	7	9	11	14	21
الترتيب	1	2	3	4	5	6	7

جدول (2 - 11)

ثم نضع ترتيب كل قيمة

(2) نجد ترتيب الوسيط حيث ترتيب الوسيط =  $\frac{1+7}{2} = 4$  أي الترتيب الرابع

(3) نجد قيمة الوسيط (و) وهي القيمة التي تناظر الترتيب الرابع والمشار لها بالسهم فيكون قيمة الوسيط و = 9

2- اذا كان عدد القيم غير المئوية زوجياً.

لايجاد الوسيط لهذه القيم نتبع الخطوات التالية.

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

(2) نجد ترتيب الوسيطين من العلاقة التالية:

(11-2) .....  $\boxed{\text{ترتيب } w_1 \text{ (الوسيط الأول)} = \frac{n}{2}}$

(12-2) .....  $\boxed{\text{ترتيب } w_2 \text{ الوسيط الثاني} = \frac{n}{2} + 1 \text{ أو } \frac{2 + n}{2}}$

(3) نجد قيم  $w_1$ ، و  $w_2$  المناظرة لرتبهما.

(4) نجد و (الوسيط) من العلاقة:

(13-2) .....  $\boxed{w = \frac{w_1 + w_2}{2}}$

مثال (2-14): اوجد الوسيط لقيم المشاهدات 20،18،11،29،15،25،7،3

الحل: نتبع الخطوات التالية.

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً. ونضع مقابل كل قيمة ترتيبها.

29	25	20	18	15	11	7	3
8	7	6	5	4	3	2	1

(2) نجد ترتيب الوسيطين  $w_1$ ، و  $w_2$  من العلاقتين السابق ذكرهما، فيكون ترتيب

$w_1 = \frac{8}{2} = 4$  أي الرابع، وترتيب  $w_2 = 1 + 4 = 5$  أي الخامس.

(3) نجد القيم المناظرة لرتبهما كما هو مشار بالأسهم فيكون قيمة  $w_1=15$ ، وقيمة  $w_2=18$ .

(4) نجد الوسيط و للقيم من العلاقة:

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{18 + 15}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

## (ب) حساب الوسيط للبيانات المبوبة.

قبل الخوض في إيجاد الوسيط للبيانات المبوبة وذكر الخطوات لها لابد من التعرف لمفهوم التكرار المتجمع الصاعد والهابط.

تعريف: التكرار المتجمع الصاعد هو اضافة تكرار الفئة(او الفئات) السابقة لتكرار

الفئة اللاحقة ويبدأ التكرار المتجمع الصاعد بالصفر وينتهي بمجموع

التكرارات الكلي ولعمل جدول متجمع صاعد تتبع الخطوات التالية

(1) نضيف فئة سابقة في الجدول المعطى تكرارها صفرًا.

(2) نجد الحدود الفعلية لكل فئة.

(3) نجد عمود الحدود الفعلية العليا ونسبها برمز  $>$  للدلالة على أصغر من.

(4) نجد عمود التكرارات المتجمعة بحيث يكون تكرار الفئة التي هي اقل من الحد

الادنى المعطى = صفر

تكرار الفئة المتجمعة الاولى = تكرار الفئة الاولى المعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثانية= تكرار الفئة الاولى المعطاة + تكرار الفئة الثانية المعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثالثة=تكرار الفئة الاولى المعطاة+تكرار الفئة الثانية المعطاة+ الثالثة

⋮  
⋮  
⋮

تكرار الفئة المتجمعة الاخيرة= مجموع التكرارات جميعها.

والآن ننتقل الى كيفية إيجاد الوسيط من البيانات المبوبة.

## ايجاد الوسيط من البيانات المبوبة :

لايجاد الوسيط للبيانات المبوبة نتبع الخطوات التالية:

(1) نضيف للحدول المعطى فئة سابقة تكرر صفرًا.

(2) نجد عمود للفئات الفعلية العلوية.

(3) نجد عمود تكرر المتجمع الصاعد.

(4) نجد ترتيب الوسيط من العلاقة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{كر}}{2} \dots (2-14)$$

(5) نحدد موقع ترتيب الوسيط بين التكرارات المتجمعة الصاعدة ونشير له بسهم.

(6) نجد الفئة الوسيطة بمحديها الفعلين الأدنى والأعلى وهي الفئة التي تقع تحت السهم الذي يشير لترتيب الوسيط.

(7) نحدد الحد الأدنى للفئة الوسيطة.

(8) نحدد تكرارا المتجمع السابق واللاحق لترتيب الوسيط.

(9) نحدد طول الفئة الوسيطة.

(10) نجد الوسيط من العلاقة:

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \frac{\text{تكرار المتجمع اللاحق لرتيب الوسيط} - \text{تكرار المتجمع السابق لرتيب الوسيط}}{\text{طول الفئة}} \dots (2-15)$$

مثال (2-15): البيانات التالية تمثل الاجور الشهرية لمائة عامل موزعين بالجدول (2-12).

فئات الاجور	69-60	79-70	89-80	99-90	109-100	المجموع
عدد العمال	6	12	47	25	10	100

جدول (2 - 12)

المطلوب: ايجاد مايلي.

أ) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم اقل من 60 دينار.

ب) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم بين 60 واقل من 100 دينار.

ج) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم 80 دينار فأكثر.

د) اوجد الوسيط لهذه الاجور .

هـ) اوجد الوسيط بطريقة الرسم.

الحل: أ) عدد العمال الذين تقل رواتبهم عن 60 = صفر.

ب) عدد العمال الذين رواتبهم بين 60 وأقل من 100 دينار.

$$= 90 = 25 + 47 + 12 + 6$$

ج) عدد العمال الذين رواتبهم 80 دينار فأكثر =  $82 = 10 + 25 + 47$  عاملاً.

د) لايجاد الوسيط تتبع الخطوات السابقة ونشكل الجدول (2-13) الذي يشمل جزءاً من الخطوات.

الفتات	تكرار الفتة	الفتات الفعلية	الفتات الفعلية العليا	التكرار المتجمع الصاعد
59-50	صفر	59.5-49.5	59.5 >	صفر
69-60	6	69.5-59.5	69.5 >	6
79-70	12	79.5-69.5	79.5 >	18
89-80	47	89.5-79.5	89.5 >	65
99-90	25	99.5-89.5	99.5 >	90
109-100	10	109.5-99.5	109.5 >	100
	100			

### جدول (2-13)

ثم نتبع الخطوات الأربع التالية:

$$(1) \quad \text{نجد ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50$$

$$(2) \quad \text{نجد الفتة الوسيطة (79.5 - 89.5)}$$

$$(3) \quad \text{نجد الحد الأدنى للفتة الوسيطة} = 79.5.$$

$$(4) \quad \text{نطبق العلاقة:}$$

$$\text{الوسيط} = \frac{18-50}{18-65} \times 10 + 79.5$$

$$= \frac{10 \times 32}{47} + 79.5 = \frac{320}{47} + 79.5$$

$$= 6.81 + 79.5 = 86.31$$

ونلاحظ ان قيمة الوسيط وقعت ضمن الفتة الوسيطة ولذا سميت الفتة الوسيطة.

هـ- لايجاد الوسيط بطريقة الرسم نتبع الخطوات التالية:

(1) نرسم محورين متعامدين المحور الأفقي يمثل الحدود العليا الفعلية والمحور الرأسي



يمثل عليه التكرار المتجمع الصاعد.

$$(2) \text{ نجد ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50.$$

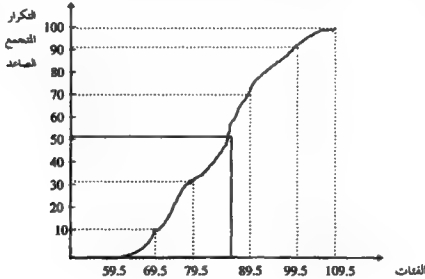
(3) نعين النقاط التي أحداثها الأول يمثل الفئات الفعلية والاحداثي الثاني يمثل التكرار المتجمع المقابل لها.

(4) نرسم المنحنى المار بهذه النقاط ويسمى المنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

(5) نعين ترتيب الوسيط على المحور الرأسي ونقيم عمود من هذه النقطة على المحور الرأسي وموازي للمحور الأفقي يتقاطع مع المنحنى في نقطة.

(6) ننزل من هذه النقطة عمود على المحور الأفقي يتقاطع معه في نقطة تدل على الوسيط.

والآن نقوم برسم المنحنى لتحديد قيمة الوسيط من الرسم كما في شكل (1-2).



شكل (1-2).

مثال (2-16): البيانات التالية تمثل اجور 100 عامل مينة بالجدول (2 - 14).

فئات الأجور	-80	-90	-100	-110	120-130
التكرار	8	22	41	19	10

جدول (2 - 14)

والمطلوب :

(1) إيجاد الوسيط بالطريقة الحسابية.

(2) إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية.

الحل: تكون جدول الحل (2 - 15)

فئات الأجرور	التكرار	فئات أقل > 80	التكرار التجمعي
-80	8	90 >	8
-90	22	100 >	30
-100	41	110 >	71
-110	19	120 >	90
130-120	10	130 >	100
100			

جدول (2 - 15)

$$\text{الحل: (1) نجد ترتيب الوسيط} = \frac{\sum_{r=1}^n \text{كث}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

- نجد الفئة الوسيطة = 100 - وحدها الأدنى = 100

$$\text{- قيمة الوسيط و} = 100 + \frac{10}{1} \times \frac{30-50}{30-71}$$

$$= 100 + \frac{10 \times 20}{1 \times 41} = 104.9 = 4.9 + 100 = \frac{200}{41}$$

## (2) إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية

- نرسم المنحنى المتجمع الصاعد

- نحدد ترتيب الوسيط

- نقيم عمود من نقطة ترتيب الوسيط ليقطع المنحنى في نقطة مثل ن ثم من

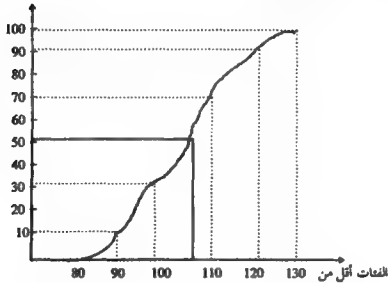
النقطة ن ننزل عمود يقطع محور الفئات في نقطة مثل م فتكون القيمة المقابلة للنقطة م

هي قيمة الوسيط

$$\text{ترتيب الوسيط: } \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

قيمة الوسيط = 104.9

كما هو مبين في شكل (2-2).



شكل (2-2)

## خصائص الوسيط

(1) الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفة كما هو الحال في الوسط الحسابي

مثال (2-17): أوجد الوسيط لقيم المشاهدات:

47, 22, 31, 25, 55, 3, 21, 7

الحل: نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً.

- 3 7 21 22 31 47 2555

- نجد ترتيب الوسيط و  $= \frac{1+7}{2} = 4$  .: القيمة الرابعة هي الوسيط

- نأخذ القيمة المناظرة لترتيب الوسيط فنجد ان و  $= 22$  نلاحظ ان القيمة المتطرفة 2555 لا تؤثر على قيمة الوسيط.

(2) الوسيط يتأثر بعدد القيم للملاحظات .

مثال (2-18): اوجد الوسيط لقيم المشاهدات التالية.

7،11،5،33،19،4،8

الحل: نرتب قيم المشاهدات تصاعدياً

4 5 7 8 11 19 33

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

- نجد ترتيب الوسيط  $= \frac{1+7}{2} = 4$  أي الرابع.

يكون الوسيط مساو للقيمة المناظرة للترتيب الرابع أي أن و  $= 8$ .

ولو حذفنا المشاهدين 5،4 مثلاً ثم نعيد ترتيب البيانات

7 8 11 19 33

(1) (2) (3) (4) (5)

نجد أن الوسيط و  $= 11$  نلاحظ ان الوسيط تغير ولم يبق ثابتاً.

(3) يأخذ بعين الاعتبار موقع القيم وليس متوسطها.

(4) يمكن ايجاده من الجداول المفتوحة.

(5) مجموع الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات عن وسيطها اقل من مجموع الانحرافات المطلقة للقيم عن اية قيمة أخرى في حالة البيانات غير المبوبة.  
مثال (2-19): اوجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات 3، 11، 5، 9، 14 عن وسيط هذه القيم ثم اوجد الانحرافات المطلقة عن القيمة 5.

الحل: نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً

3      5      9      11      14

(1)    (2)    (3)    (4)    (5)

الوسيط 9

الانحرافات المطلقة عن الوسيط.

$$ح_1 = |3-9| = 6$$

$$ح_2 = |5-9| = 4$$

$$ح_3 = |9-9| = 0$$

$$ح_4 = |11-9| = 2$$

$$ح_5 = |14-9| = 5$$

المجموع = 17

الانحرافات المطلقة عن القيمة 5

$$ح_1 = |3-5| = 2$$

$$ح_2 = |5-5| = 0$$

$$ح_3 = |9-5| = 4$$

$$ح_4 = |5-11| - 6$$

$$ح_5 = |5-14| - 9$$

$$\text{المجموع} = 21$$

نلاحظ ان مجموع الانحرافات عن الوسيط هي اقل من مجموع الانحرافات عن اية قيمة اخرى.

## 2-3: المنوال:

تعريف: المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً او شيوعاً بين قيم المشاهدات.

### طرق ايجاد المنوال:

أ- ايجاد المنوال للبيانات غير المبوبة.

(1) اذا لم يتكرر اياً من القيم فلا يوجد منوالاً

مثال (2-20): لدينا قيم المشاهدات 7، 9، 11، 12، 15 أوجد منوال هذه القيم .

الحل: لا يوجد منوال لهذه القيم حيث ان اياً من القيم لم تتكرر.

(2) اذا تكرر أحدها فيكون هناك منوالاً واحداً.

مثال (2-21): اوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية 7، 11، 5، 7، 11، 9، 7، 9

الحل: القيمة الأكثر تكراراً هي القيمة 7.

اما اذا كان لقيمتين نفس العدد من التكرار فيكون للقيم منوالان وهكذا يزداد المنوالات بزيادة العدد المتساوية التكرار على ان يبقى ولو على الاقل قيمة واحدة غير متكررة من بين القيم.

مثال (2-22): اوجد المنوال او المنوال لقيم المشاهدات التالية

$$11, 4, 9, 17, 9, 4$$

الحل: يوجد منولان هما 9،4 لان هما نفس التكرار

ب) ايجاد المنوال للقيم المبوية

لايجاد المنوال هناك طريقتان

1) الطريقة الجبرية

2) الطريقة الهندسية.

1) نبدأ بالطريقة الجبرية وهذه تقسم الى ثلاثة طرق منها:

1) طريقة الفروق لبيرسون.

لايجاد المنوال هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية :

- نجد الفئة المنوالية وهي الفئة التي تقابل الاكثر تكراراً من بين الفئات.
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها وليكن  $f_1$
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة اللاحقة لها ولتكن  $f_2$
- نجد المنوال من العلاقة التالية.

$$\text{المنوال} = \text{الحد الادنى للفئة المنوالية} + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times \text{ط (طول الفئة المنوالية)} \quad \dots (2-16)$$

مثال (2-23): البيانات التالية تمثل الدخل الشهري لمائة أسره موزعة كما في الجدول

(2-16).

فئات الدخل	99-0	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الاسر	15	25	37	13	10	100

جدول (2-16)

والمطلوب ايجاد المنوال بطريقة الفروق (بيرسون)

الحل: يمكن تكوين الجدول (2 - 17) والمحتوى على الفئات الفعلية.

فئات الدخل	تكرار الفئة
99.5-89.5	15
109.5-99.5	25
119.5-109.5	37
129.5-119.5	13
139.5-129.5	10
المجموع	100

الفئة المنوالية التي تقابل الأكثر تكراراً

جدول (2 - 17)

- نجد الفئة المنوالية وهي 109.5-119.5

- نجد الحد الأدنى للفئة المنوالية = 109.5

- نجد  $f_1 = 37 - 25 - 12$

- نجد  $f_2 = 37 - 13 - 24$

- نجد المنوال من العلاقة السابقة.

$$\text{المنوال} = 10 \times \frac{12}{24 + 12} = \frac{120}{36} =$$

$$= 109.5 + 3.33 = 112.83$$

## (2) طريقة الرافعة

لإيجاد المنوال بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية.

- نحدد الفئة المنوالية وهي التي تقابل الأكثر تكراراً.

- نجد الحد الأدنى للفئة المنوالية.

- نجد  $k_1$ : التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية.



- نجد  $k_2$ : التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية.

نطبق العلاقة التالية.

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{k_1}{k_1 + k_2} \times \text{طول الفئة} \quad (17-2) \dots\dots$$

مثال (24-2) : أوجد المنوال للبيانات المبوبة بالجدول (18-2).

الفئات	-20	-25	-30	-35	-40	المجموع
التكرار	3	12	31	10	4	60

جدول (2 - 18)

أ) بطريقة الفروق. ب) بطريقة الرافعة.

الحل: نكون الجدول التالي بشكل رأسي (2 - 19).

الفئات	التكرار
-20	3
-25	12
-30	31
-35	10
-40	4
المجموع	60

جدول (2 - 19)

أ- بطريقة الفروق : نتبع ما يلي :

- نجد الفئة المنوالية = 30 وهي الفئة التي تقابل الأكثر تكراراً.

- نجد الحد الأدنى للفئة المنوالية = 30

- نجد  $f_1 = 31 - 12 = 19$

- نجد  $f_2 = 31 - 10 = 21$

- نجد المنوال من العلاقة.

$$\text{المنوال} = 30 + \frac{9}{21+19} \times 5$$

$$= 30 + 5 \times \frac{19}{40} + 30 = \frac{95}{40} + 30$$

$$= 32.375 - 2.375 + 30 =$$

ب- المنوال بطريقة الرافعة

- نجد الفئة المنوالية = 30 -

- نجد الحد الأدنى للفئة المنوالية = 30

$$- \text{نجد } K_1 = 12$$

$$- \text{نجد } K_2 = 10$$

- نطبق العلاقة التالية.

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{K_2}{K_1 + K_2} \times L$$

$$\text{المنوال} = 30 + \frac{10}{12+10} \times 5 + 30 = \frac{50}{22} + 30 = 2.27 + 30 = 32.27$$

2 ( الطريقة الهندسية:

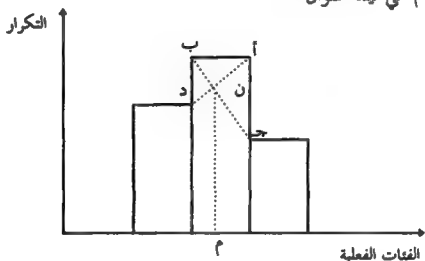
وهنا نتبع الخطوات التالية.

- نرسم محورين متعامدين المحور الافقي يمثل الفئات الفعلية أو الفئات المفتوحة والمحور الرأسي يمثل التكرارات.

- نرسم المستطيل الذي قاعدته الفئة المنوالية وارتفاعه الاكثر تكراراً

- نرسم مستطيل يلاصق المستطيل الاول ويسبقه بحيث ان قاعدته الفئة السابقة للفئة المنوالية وارتفاعه يقابل تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية.

- نرسم مستطيل ملاصق وقاعدته الفئة اللاحقة للفئة المتوالية وارتفاعه تكرار الفئة اللاحقة.
- نصل أ مع د كما في الشكل (2-3) ثم ب مع ج فيتقاطع الخطان في ن.
- ننزل عمود من ن على المحور الأفقي فيتقاطع معه في م فتكون القيمة المناظرة للنقطة م هي قيمة المتوال.



شكل (2-3)

### خصائص المتوال.

- (1) لا يتأثر بالقيم المتطرفة.
- مثال (2-25): أوجد المتوال لقيم المشاهدات التالية 3، 5، 27، 90، 3، 5، 3، 7، 3.
- الحل: المتوال = 3 وهذا يعني ان المتوال لا يتأثر بالقيم المتطرفة .
- (2) يوجد بسهولة لانه من التعريف هو القيمة الأكثر تكراراً
- (3) يمكن ايجاده من الجدول المفتوحة.
- (4) يمكن ايجاده بالرسم كما ذكرنا في الطريقة الثالثة لايجاده.

### أمثلة اضافية على المنوال

مثال (2-26): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

13,12,10,19,7

الحل: لا يوجد منوال لهذه المشاهدات لان ايا من القيم لم يتكرر.

مثال (2-27): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

17,19,17,25,25,10,19,17

الحل: المنوال = 17 لأن هذا الرقم له أكبر تكرار

مثال (2-28): اوجد المنوال او المنوالات لقيم المشاهدات التالية:

11,19,11,19,17,7

الحل: يوجد منوالان هما 11، 19.

مثال (2-29): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

20,17,15,20,17,15

الحل: لا يوجد منوال لان جميع القيم لها نفس التكرار.

مثال (2-30): البيانات التالية تمثل اجور 100 عامل مبينا كما في الجدول (2 - 20):

القيم	التكرار
-70	8
-80	22
-90	40
-100	25
-110	5
	100

جدول (2 - 20)

المطلوب: إيجاد المنوال:

أ) بطريقة الفروق (لبيرسون)

ب) بطريقة الرافعة

ج) بطريقة المنوال التقريبي.

الحل: أ) طريقة بيرسون

$$1) \text{ نجد } f_1 = 40 - 22 - 18$$

$$f_2 = 40 - 25 - 15$$

الفئة المتوالية = 90 - وحدها الأدنى = 90

$$\text{قيمة المنوال} = 90 + 10 \times \frac{18}{15 + 18} + \frac{180}{33}$$

$$= 90 + 5.45 = 95.45$$

ب) طريقة الرافعة

$$\text{قيمة المنوال} = 90 + 10 \times \frac{25}{22 + 25}$$

$$= 90 + \frac{250}{47} + 4.32 = 95.32$$

$$\text{ج) المنوال التقريبي} = \frac{100 + 90}{2} = \frac{190}{2} = 95$$

4-2 : العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

1) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتوية التواء بسيطاً وإلى الجهة اليمنى فإن ترتيب

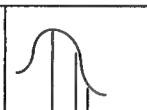
المقاييس يكون

المنوال = الوسيط = الوسط الحسابي كما هو موضح في الشكل (2-4).

(2) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتوتية التواءاً بسيطاً وإلى الجهة اليسرى فان ترتيب المقاييس يكون الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال كما في شكل (2-4) وبصيغة رموز

$$\bar{m} = w = m$$

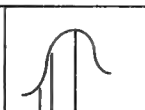
(3) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتماثلة فان الوسط الحسابي والمنوال والوسيط تنطبق على بعضها البعض كما في الشكل (2-4).



$\bar{m}$  و  $w$  و  $m$

التواء موجب أو نحو اليمين

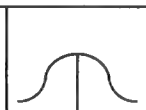
شكل (2-6)



$m$  و  $w$  و  $\bar{m}$

التواء سالب أو نحو اليسار

شكل (2-5)



$\bar{m} = w = m$

متماثل

شكل (2-4)

ونستطيع ان نخرج بالعلاقات الخطية التالية التي تربط المقاييس الثلاث بعضها ببعض.

(1) اذا كان التوزيع متماثلاً فان العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث

(18-2).....

الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

(2) اذا كان التوزيع غير متماثل فان العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث هي:

(19-2) .....

الوسط الحسابي - المنوال = 3(الوسط الحسابي - الوسيط)

(20-2).....

$$\bar{m} - m = (\bar{w} - m) \frac{3}{2} \text{ وكذلك } \bar{m} - w = \frac{3}{2} (m - w)$$

مثال (2-31): إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع غير متماثل هو 50 وكان الوسيط لهذا التوزيع هو 60 أوجد المتوال لهذا التوزيع.

الحل: من العلاقة أعلاه

$$50 - م = 3(60 - 50)$$

$$50 - م = -30 \Leftrightarrow م = 50 + 30 = 80$$

مثال (2-32): إذا كان الوسط الحسابي لقيم من المشاهدات = 45 وكان الوسيط لها = 32 أوجد المتوال لها.

الحل: من العلاقة أعلاه نجد أن:

$$45 - م = 3(32 - 45)$$

$$45 - م = 135 - 96$$

$$45 - م = 39$$

$$45 - 39 = م$$

$$6 = م$$

مثال (2-33): إذا كانت مجموعة من المشاهدات تتوزع توزيعاً طبيعياً متماثلاً وسطه الحسابي = 36 أوجد المتوال لهذه المشاهدات.

الحل: التوزيع متماثل.

$$\therefore \bar{س} = و = م = 36$$

وعليه فإن المتوال : 36.

## أمثلة متنوعة على جميع الأوساط

مثال (2-34) : إذا كان لدينا قيم المشاهدات التالي 10،13،8،9،8،15،7

المطلوب: إيجاد ما يلي:

(1) الوسط الحسابي لقيم المشاهدات

(2) الوسيط لهذه القيم

(3) المنوال لهذه القيم.

الحل: (1) لايجاد الوسط الحسابي نجده من العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{10 + 13 + 8 + 9 + 8 + 15 + 7}{7} = \frac{70}{7} = 10$$

(2) لايجاد الوسيط نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

15	13	10	9	8	8	7
(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

نجد ترتيب الوسيط من العلاقة التالية

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1+n}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$$

∴ قيمة الوسيط = 9 وهي القيمة المناظرة للترتيب الرابع

(3) قيمة المنوال هي القيمة الأكثر تكراراً من بين القيم.

∴ قيمة المنوال = 8

مثال (2-35): في شعبة مؤلفة من 100 طالب وجدان توزيع الطلاب حسب

علاماتهم كما هو مبين في الجدول (2 - 21).



فئات العلامات	عدد الطلاب
-40	8
-50	18
-60	20
-70	26
-80	16
-90	12
	100

جدول (2 - 21)

المطلوب:

- 1) إيجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80.
- 2) إيجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67.
- 3) إيجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 57، 84.
- 4) إيجاد الوسط الحسابي بطرقه الثلاث.
- 5) إيجاد الوسيط لهذه البيانات.

الحل:

- 1) لإيجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80 نرسم المخطط التالي:

لخصر عدد الطلبة الذين ضمن هذه الفترة لنحده = 20 + 26 = 46

$$\therefore \text{نسبة الطلاب} = \frac{46}{100} = 0.46$$

(5) لإيجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67 نرسم المخطط التالي

نجد أولاً عدد الطلبة من 50 الى 52 ثم نطرح الناتج من عدد طلبة الفترة من 50 الى

60 على النحو التالي

$$18 \quad 10$$

$$2 \quad \text{س}$$

$$\text{س} = \frac{18 \times 2}{10} = 3.6 \approx 4$$

$\therefore$  عدد الطلبة في الجزء المطلوب أولاً = 18 - 4 = 14

نجد عدد الطلبة في المطلوب من 60 الى 67 على النحو التالي

$$20 \quad 10$$

$$7 \quad \text{س}$$

$$\text{س} = \frac{20 \times 7}{10} = 14$$

$\therefore$  عدد الطلبة ضمن الفترة المطلوبة = 14 + 14 = 28 طالباً

$$\text{نسبة الطلاب} = \frac{28}{100} = 0.28$$

$$18 \quad 10$$

$$13 \approx \frac{126}{10} = \frac{18 \times 7}{10} = \text{س} \Leftarrow \frac{\quad}{\text{س}} = \frac{\quad}{7}$$

$$\text{س} \quad 7$$

عدد الطلاب ضمن الفئة المطلوبة =  $5+26+20+6=57$  .: النسبة =  $\frac{57}{100} = 0.57$

(7) أ) بإيجاد الوسط الحسابي بطريقة القانون العام

$$71 = \frac{7100}{100} =$$

ب- إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي حيث أ الوسط الفرضي

(8) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد (2 - 22)

الفتات	التكرار	اقل من	التكرار المتجمع الصاعد
-40	8	$50 >$	8
-50	18	$60 >$	26
-60	20	$70 >$	46
-70	26	$80 >$	72
-80	16	$90 >$	88
100-90	12	$100 >$	100
	100		

جدول (2 - 22)

بمجموع التكرار

$$50 = \frac{100}{2} = \frac{\text{ترتيب الوسيط}}{2}$$

$$40 \quad 4 \quad 46-50$$

$$71.54 = 1.54 + 70 = \frac{40}{26} + 70 = 10 \times \frac{4}{26} + 70 = 10 \times \frac{46-50}{46-72} + 70$$

## 2-5 : المئينات والرتب المئينية

2-5-1 : مفهوم المئين :

ان تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى مئة جزء متساو يسمى بالمئينات فالمئين الاول م<sub>1</sub> هو القيمة التي يسبقها 1% من البيانات ويليها 99% من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا . والمئين الثلاثون (م<sub>30</sub>) هو القيمة التي يسبقها 30% من البيانات ويليها 70% من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا .

### 2-5-2 : كيفية ايجاد المئينات

أ- اذا كانت البيانات غير مبوبة . تتبع الخطوات التالية:-

- نقوم بترتيب المشاهدات ترتيبا تصاعديا .

- نجد ترتيب المئين من العلاقة التالية:-

$$\text{ترتيب المئين المطلوب} = \frac{\text{المئين}}{100} \times (\text{عدد المشاهدات} + 1) \dots (21-2)$$

وبشكل رموز يمكن صياغة العلاقة كما يلي

$$\text{ترتيب المئين} = \frac{r}{100} \times (n+1) \dots (22-2)$$

- نجد موقع المئين .

- نجد قيمة المئين المناظرة لموقعه .

مثال (2-36): البيانات التالية تمثل الرواتب لسبعة عمال اوجد المئين الاربعين لهذه الرواتب

64 ، 88 ، 68 ، 90 ، 60، 75، 80

الحل: نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا

القيمة	90	88	80	75	68	64	60
الترتيب	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

نجد ترتيب م<sub>40</sub> من العلاقة أعلاه:

$$\text{ترتيب م}40 = \frac{40}{100} = (1 + 7) = 3.2$$

$3 \leq 3.2 \leq 4$  أي أن ترتيب م40 يقع بين الترتيب الثالث والرابع

نجد القيم المناظرة للترتيبين الثالث والرابع وهي 68، 75

$$\therefore \text{قيمة م}40 = \frac{75 + 68}{2} = \frac{143}{2} = 71.5$$

وتفسر الجواب ان 40٪ من مجموع الرواتب تقل عن 71.5 دينار و60٪ من

الرواتب تزيد عن 71.5 دينار.

(ب) إيجاد المئين لقيم المشاهدات الموية

ويتم بطريقتين

(1) الطريقة الحسابية الاولى (2) الطريقة الحسائية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين تشبه تماما الخطوات المتبعة في إيجاد الوسيط لان

الوسيط هو عبارة عن مئين 50

(1) **الطريقة الحسابية الاولى:-**

- نشكل جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً.

	رقم المئين	
(23-2) .....	$\text{نجد ترتيب المئين} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{100} \times \text{رقم المئين}$	-

	$\text{وبصيغة رمزية} = \frac{r}{100} \times \sum_{i=1}^n f_i$	
(24-2).....		

- نحدد موقع ترتيب المئين ونشير اليه بسهم.

- نجد الفئة المثينة وهي الفئة التي تقع اسفل السهم الذي يحدد موقع ترتيب المثين في الفئات المنفصلة. أما في الفئات المتصلة فإن السهم يمر بين حديهما. نجد المثين من العلاقة التالية:-

$$\text{المثين} = \text{الحد الأدنى للفئة المثينة} + \frac{\text{تكرار المتجمع الصاعد السابق} - \text{تكرار المتجمع الصاعد اللاحق}}{\text{طول الفئة}} \times \text{طول الفئة} \quad (2-25)$$

مثال(2-37): البيانات التالية تمثل اطوال 40 طالباً موزعين كما في الجدول (2-23):

فئات الاطوال	-15	-160	-163	-166	169 - 172
عدد الطلاب	5-	7	12	9	7

جدول (2 - 23)

المطلوب: (1) إيجاد المثين الأول (م<sub>1</sub>) (2) إيجاد المثين 30 (م<sub>30</sub>)

(3) إيجاد المثين 90 (م<sub>90</sub>%)

الحل: نشكل اولاً جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً (2 - 24).

فئات الاطوال	عدد الطلاب	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
-157	5	157>	00
-160	7	160>	5
-163	12	163>	12
-166	9	166>	24
172-169	7	169>	33
		172>	40
المجموع	40		

جدول (2 - 24)

نستخرج ترتيب م<sub>1</sub> =  $40 \times \frac{1}{100} - \frac{4}{10} = 0.4$  ونلاحظ هنا بأن ترتيب المئين هو أقل من التكرار المتجمع الصاعد للفترة الاولى (1) وعلى هذا الاساس لانستطيع حل السؤال بهذه الطريقة الا اذا اضفنا فئة سابقة وتكرارها صفر لان ترتيب أي مئين لا بد ان يكون له تكرار متجمع صاعد سابق وتكرار متجمع صاعد لاحق.

- الفئة المئينية م<sub>1</sub> = 157 واقل من 160

- الحد الادنى = 157

- طول الفئة المئينية = 157 - 160

- التكرار السابق = 0 والتكرار اللاحق = 5 وبتطبيق القاعدة اعلاه نجد م<sub>1</sub> من العلاقة

$$\therefore \text{قيمة م}_1 = 157 + 3 \times \frac{-04}{-5} = 157.24$$

(2) لايجاد المئين 30 (م<sub>30</sub>%)

بالاعتماد على الجدول السابق

$$\text{نجد ترتيب المئين } 30 = 40 \times \frac{30}{100} = 12$$

وفي هذه الحالة نلاحظ بأن ترتيب المئين جاء مطابقا لاحد التكرارات المتجمعة

الصاعدة وهو 12 فان م<sub>30</sub> في هذه الحالة يساوي نهاية الفئة المناظرة للتكرار المتجمع الصاعد (12) = 163.

(3) ايجاد مئين 90 (م<sub>90</sub>%)

بناء على المعلومات الموجودة في الجدول اعلاه

$$\text{نجد ترتيب المئين } 90 = 40 \times \frac{90}{100} = 36$$

الفئة المئينية = 169 واقل من 172 وحدها الادنى 169

$$\text{طول الفئة} = 169 - 172 = 3$$

$$\text{التكرار المتجمع الصاعد السابق} = 33$$

$$\text{التكرار المتجمع الصاعد اللاحق} = 40$$

$$\text{قيمة م} = 90 = 169 + \frac{33 - 36}{33 - 40} \times 3 = 169 + 3 \times \frac{3}{7}$$

$$170.282 = 1.28 + 169 = \frac{9}{7} + 169$$

- إيجاد المتين بالطريقة الحسابية الثانية:

ان الخطوات لهذه الطريقة تتطابق تماما مع الخطوات المستخدمة في الطريقة

الحسابية الثانية لايجاد الوسيط لان الوسيط هو معين 50 ي م.

مثال (2-38): باستخدام البيانات الواردة في المثال اعلاه اوجد ما يلي:-

$$(1) \quad 1\% \quad (2) \quad 90\%$$

الحل: لايجاد م<sub>1</sub> نتبع ما يلي:-

$$(1) \quad \text{نجد ترتيب م}_1 = 1 = 40 \times \frac{1}{100} = 0.4 \text{ ثم نحدد الموقع}$$

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة المتينة

$$5 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad 0.4$$

$$س \quad \begin{bmatrix} 157 \\ 1 \\ 163 \end{bmatrix} \quad 3$$

$$\frac{0.4}{5} = \frac{س}{3} \quad \text{نضرب ضربا تبادليا فنجد أن } 5س = 1.2 \quad \therefore س = \frac{1.2}{5} = 0.24$$

$$\therefore \text{متين } (1) = \text{الحد الأدنى للفئة المتينة} + \text{قيمة س} = 157 + 0.24 = 157.24$$

$$160.3 = 0.3 + 160$$



## (2) إيجاد متين 90

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة المثينة

$$7 \begin{bmatrix} 33 \\ 36 \\ 40 \end{bmatrix} 3$$

$$س \begin{bmatrix} 169 \\ 90م \\ 172 \end{bmatrix} 3$$

$$\frac{س}{3} = \frac{3}{7} \text{ نضرب ضربا تبادليا فنجد أن } 7س = 9 \Leftarrow س = \frac{9}{7} = 1.28$$

$$\therefore 90م = 169 + 1.28 = 170.28$$

تفسير نتيجة م<sub>1</sub> = 157.24 ان 1٪ من اطوال الطلاب تقل عن 157.24 وان

99٪ من الطلاب تزيد اطوالهم عن 157.24

تفسير نتيجة م<sub>90</sub> ان 90٪ من الطلاب تقل اطوالهم عن 170.28 وان 10٪ من

الطلاب تزيد اطوالهم عن 170.28

### 2-5-3 الترتيب المثيني:

نود أن نقارن بين المثين والترتيب المثيني. لو فرضنا انه يوجد لدينا جدول تكراري يحتوي على اطوال لعدد من الطلاب ونفترض اننا قمنا باستخراج المثين 80 وحصلنا على قيمة رقمية هي 168.9 وتفسير هذه القيمة ان 80٪ من الطلاب تقل اطوالهم عن 168.9 وان 20٪ منهم تزيد اطوالهم عن 168.9 ولو فرضنا ان طالبا طوله 170 سم وطلب اليه ان نجد نسبة الطلاب الذين تقل اطوالهم عن هذه القيمة (170سم) فانه لا بد من استخراج الترتيب المثيني

مثال (2-39): البيانات في جدول (2-25) تمثل الاجور الاسبوعية ل(40) عاملا

أوجد نسبة العمال الذين تقل اجورهم عن 17 دينار

فئات الاجور	-12	-14	-16	20-18
عدد العمال	15	13	10	2

جدول (2 - 25)

الحل: نشكل الجدول (2-26):

فئات الاجور	عدد العمال	التكرار المتجمع الصاعد
-12	15	15
-14	13	28
-16	10	38
20-18	2	40

جدول (2 - 26)

نجد الترتيب المثيني من العلاقة التالية:

$$ق = ح + \frac{ك}{100} \times ج - س$$

..... (2 - 26)

حيث

ق = القيمة المعطاة والمراد استخراج الترتيب المثيني لها وفي المثال اعلاه ق=17

ح = الحد الادنى للفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

$$\frac{ك}{100} = \text{الترتيب المثيني}$$

ج = مجموع التكرارات

س = التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

ف= التكرار العادي التي تقع فيها القيمة

ل= طول الفئة.

الحل: نطبق العلاقة أعلاه.

$$17=16+\frac{(28-40 \times \frac{ك}{100})}{10} \times 2 \text{ نضرب جميع اطراف المعادلة في } 10$$

$$170=160+(28-\frac{ك40}{100}) \times 2 \text{ نضرب القوس بالضرب في } 2$$

$$170=160-\frac{ك80}{100}+56 \text{ نضرب جميع اطراف المعادلة في } 100$$

$$17000=16000-ك80+5600$$

$$17000-16000+ك80=5600$$

$$ك80=6600$$

$$ك = \frac{6600}{80} = 82.5\%$$

وتفسير هذا الجواب ان 82.5 من مجموع العمال تقل اجورهم عن 17 دينار.

مثال (2-40): البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا موزعة كما هو في الجدول

(2-27) والمطلوب ايجاد نسبة الطلاب الذين تقل اوزانهم عن 68

كغم.

فئات الاوزان	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
عدد الطلاب	10	12	8	14	6	50

جدول (2 - 27)

الحل: نكون جدول الحل (2 - 28).

فئات الاوزان	عدد الطلاب	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد
54-50	10	54.5-49.5	10
59-55	12	59.5-54.5	22
64-60	8	64.5-59.5	30
69-65	14	69.5-64.5	44
74-70	6	74.5-69.5	50
المجموع	50		

جدول (2 - 28)

ثم بتطبيق العلاقة أعلاه:

$$68 = 64.5 + \frac{100 \times \frac{30-50}{14}}{5 \times \text{نضرب جميع اطراف المعادلة في 14}}$$

$$952 = 903 + \left(30 - \frac{50}{100}\right) \times 5 \times \text{نقل القوس بالضرب في خمسة}$$

$$952 = 903 + \frac{250}{100} - 150 \times \text{نضرب المعادلة في 100}$$

$$95200 = 90300 + 250 - 15000 \times \text{نقل الثوابت في جهة والمتغيرات في الجهة الأخرى}$$

$$95200 = 90300 + 250 - 15000$$

$$4900 = 15000 - 250$$

$$19900 = 15000 - 250$$

$$7.96\% = \frac{19900}{250} \times \text{ك}$$

## 2-6 : العشرات والربيعات :

### 2-6-1 ( العشرات :

مفهوم العشرات: هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى عشرة اقسام متساوية وكل قسم يسمى عشر. فمثلا العشر الثالث هو القيمة التي يسبقها  $\frac{3}{10}$  البيانات ويليه  $\frac{7}{10}$  من البيانات على فرض أن القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا. والوسيط هو العشر الخامس ويوجد تسعة عشرات.

### 2-6-1 : العشرات وكيفية إيجادها :

لإيجاد العشرات :

أ- البيانات غير المبوبة: وفي هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

- نرتب البيانات تصاعديا
  - نجد ترتيب العشر
  - نحدد الترتيب الأدنى والرتيب الأعلى لترتيب العشر
  - نجد القيم المناظرة للترتيبين
  - نجد قيمة العشر من الوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين للترتيبين.
- مثال (2-41): البيانات التالية تمثل علامات 8 طلاب من 50 في مادة الاحصاء

41، 32، 46، 28، 36، 20، 35، 23

والمطلوب إيجاد:

(1) العشر الثالث مع تفسير النتيجة

(2) العشر الثامن مع تفسير النتيجة.

الحل: 1) لايجاد العشير الثالث نتبع الخطوات التالية:

- ترتب البيانات ترتيبا تصاعديا على النحو

القيم. 46 41 36 35 32 28 23 20

الترتيب (8) (7) (6) (5) (4) (3) (2) (1)

$$2.7 = \frac{270}{100} = 9 \times \frac{30}{100} = (1+8) \frac{30}{100} = (1+n) \frac{30}{100} = \text{ترتيب العشير الثالث}$$

$2.7 > 2$  3 ترتيب العشير الثالث يقع بين الترتيب الثاني والثالث

نجد القيمتين المناظرتين للترتيب الثاني والثالث وهما على التوالي 28، 23

$$\therefore \text{العشير الثالث} = \frac{28+23}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$$

تفسير النتيجة (25.5) أي أن 30٪ من عدد الطلاب تقل علاماتهم عن 25.5 وان

70٪ من عدد الطلاب تزيد علاماتهم على 25.5

2) لايجاد العشير الثامن:

نستفيد من ترتيب البيانات في التمرين السابق

ترتيب العشير الثامن

$$72 = \frac{720}{100} = 9 \times \frac{80}{100} = (1+8) \frac{80}{100} = (1+n) \frac{80}{100} =$$

$72 > 7$  8 نلاحظ ان ترتيب العشير الثامن يقع بين الترتيب السابع والثامن.

نجد القيمتين المناظرتين للترتيبين السابع والثامن وهما على التوالي 46، 41

$$\text{العشير الثامن} = \frac{46+41}{2} = \frac{87}{2} = 43.5$$

تفسير النتيجة (43.5) أي أن 80٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 43.5 و 20٪ من

الطلاب علاماتهم تزيد عن 43.5

## ب) العشريرات للبيانات المبوبة

وتوجد بطريقتين

1- الطريقة الحسابية الاولى 2- الطريقة الحسابية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين مطابقة تماما كالمخطوطات المتبعة في كل من الوسيط، والمتين، والريعات.

مثال (2-42): أوجد العشر الثالث للبيانات المبوبة في الجدول (2 - 29)

الفئات	6-4	9-7	12-10	15-13	المجموع
التكرار	3	4	6	5	18

جدول (2 - 29)

الحل: لايجاد العشر الثالث نتبع الخطوات التالية:

- نشكل جدول الحل (2 - 30)

الفئات	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
6-4	3	6.5-3.5	6.5 >	3
9-7	4	9.5-6.5	9.5 >	7
12-10	6	12.5-9.5	12.5 >	13
15-13	5	15.5-12.5	15.5 >	18

جدول (2 - 30)

$$- \text{ترتيب العشر الثالث (30)} = 18 \times \frac{30}{100} = 5.4 \approx 5$$

الفئة العشرية = 6.5-9.5

الحد الادنى للفئة العشرية 6.5

طول الفئة العشرية = 9.5-6.5 = 3

التكرار المتجمع السابق = 3

التكرار المتجمع اللاحق=7

نطبق العلاقة التالية:

العشير المطلوب =

$$\text{الحد الأدنى للفئة العشوية} + \frac{\text{ترتيب العشور - التكرار للمتجمع السابق لترتيب العشور} \times \text{طول الفئة} \dots (27-2)}{\text{التكرار للمتجمع اللاحق لترتيب العشور - التكرار للمتجمع المسبق لترتيب العشور}}$$

$$8.3 = 1.8 + 6.5 = \frac{7.2}{4} + 6.5 = \frac{24}{4} + 6.5 = 3 \frac{3-54}{3-7} + 6.5 = \text{العشير الثالث}$$

إيجاد العشير الثالث 30 بالطريقة الحسابية الثانية

بناء على الجدول المشكل اعلاه نقوم بكتابة العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة العشوية

$$4 \begin{bmatrix} 3 \\ 5.4 \\ 7 \end{bmatrix} 2.4$$

$$3 \begin{bmatrix} 6.5 \\ \text{الثالث} \\ 9.5 \end{bmatrix} \text{العشور} \text{س}$$

$$\frac{24}{4} = \frac{س}{3}$$

بالضرب التبادلي نحصل على 4س=7.2

$$1.8 = \frac{7.2}{4} = س$$

العشير الثالث = الحد الأدنى للفئة العشوية+قيمة س

$$8.3 = 1.8 + 6.5 =$$

وتفسير النتيجة(8.3)هي أن 30% من مجموع البيانات تقل عن 8.3 و70% من البيانات

تزيد على هذه القيمة.



## 2-6-2) الربيعات

ان مفهوم الربيعات هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى اربعة اجزاء متساوية يسمى بالربيعات ويوجد ثلاثة ربيعات مرتبة من اليسار الى اليمين وهي الربيع الاول او الربيع الأدنى او 25م والربيع الثاني او الوسيط او 50م والربيع الثالث او الربيع الأعلى او 75م وعلى فرض ان البيانات مرتبة تصاعديا فاننا نعرف كل ربيع على حده.

**تعريف:** الربيع الاول هو القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويلها ثلاثة ارباع البيانات. وسنرمز له بالرمز 1.

**تعريف:** الربيع الثاني هو القيمة التي يسبقها نصف البيانات ويلها النصف الآخر. وسنرمز له بالرمز 2.

**تعريف:** الربيع الثالث هو القيمة التي يسبقها ثلاثة ارباع البيانات ويلها ربع البيانات. وسنرمز له بالرمز 3.

والربيعات هي من أشباه مقاييس النزعة المركزية ويمكن إيجادها:

أ- من البيانات غير المبوبة (المفردة) ومن أمثلتها:

1) الربيع الأدنى (الأول) ( 1ر أو 25م) وكيفية إيجادها.

- نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا.

- نجد ترتيب الربيع الأدنى من العلاقة التالية:

$$(28-2) \dots\dots\dots \boxed{(1+n) \frac{25}{100} = 25م}$$

- نجد موقع ترتيب الربيع الأدنى بين الترتيب.

- نجد القيم المناظرة للترتيب التي تحصر ترتيب الربيع الأدنى.

- نجد قيمة الربيع الأدنى من العلاقة.

قيمة الربيع الأدنى = المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتين تحصران الربيع الأدنى.

- الربيع الثاني (الوسيط 50) يمكن إيجاده كما مر في الوسيط.

- إيجاد الربيع الثالث أو 75 أو الربيع الأعلى ونتبع الخطوات التالية:

(1) نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً.

(2) نجد ترتيب الربيع الثالث من العلاقة.

$$\text{ترتيب الربيع الثالث (75م)} = \frac{75}{100} (1+n)$$

(3) نحدد موقع ترتيب الربيع الثالث من بين الترتيب للقيم.

(4) نجد القيم المناظرة للترتيب التي تحصر الربيع الثالث.

(5) نجد قيمة الربيع الثالث من العلاقة.

قيمة الربيع الثالث = المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتان تحصران الربيع الأعلى.

مثال (2-43): البيانات التالية تمثل علامات ستة طلاب من عشرة درجات

5،6،8،7،1،9 اوجد مايلي :

(1) الربيع الأدنى مع تفسير النتيجة.

(2) الربيع الأعلى مع تفسير النتيجة.

الحل: (1) لإيجاد الربيع الأدنى نتبع الخطوات التالية :

- نرتب البيانات تصاعدياً على النحو التالي

10	9	8	7	6	5
(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

- نجد ترتيب الربيع الأدنى =  $1.75 = \frac{7}{4} - 7 \times \frac{1}{4} - (1+6) \frac{1}{4} - (1+n) \frac{25}{100}$

- نحدد موقع الربيع الأدنى  $2 > 1.57 > 1$

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الأول والثاني وهما على التوالي 65،

الربيع الأدنى =  $5.5 = \frac{11}{2} - \frac{6+5}{2}$

- ومعنى هذه النتيجة ان 25٪ من الطلبة تقل علاماتهم عن 5.5 وان 75٪

من الطلبة تزيد علاماتهم عن 5.5

(2) الربيع الاعلى أو الثالث (3 أو 75)

لايجاد الربيع الأعلى

نجد ترتيب الربيع الاعلى =  $5.25 = \frac{21}{4} - 7 \times \frac{3}{4} - (1+6) \frac{3}{4} - (1+n) \frac{75}{100}$

نحدد موقع ترتيب المئين

$5 > 5.25 > 6$  أي ترتيب الربيع الاعلى يقع بين الترتيبين الخامس والسادس

نجد الارقام المناظرة للترتيب الخامس والسادس وهي على التوالي 10،9

∴ الربيع الاعلى =  $9.5 = \frac{19}{2} = \frac{10+9}{2}$  وتفسير النتيجة كما يلي

أي ان 75٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 9.5 وان 25٪ من الطلاب

علاماتهم تزيد عن 9.5.

## ب) إيجاد الربيعات من البيانات المبوبة

ويمكن إيجادها بطريقتين

(1) الطريقة الحسابية (2) الطريقة البيانية

### (1) الطريقة الحسابية

وتقسم الى طريقتين:

(1) الطريقة الحسابية الاولى (2) الطريقة الحسابية الثانية

ان الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين هي نفس الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين في كل من الوسيط والمئينات ولذلك لاداعي لذكرها مرة أخرى.

مثال (2-44): البيانات التالية تمثل الانفاق الشهري لعشر أسر موزعة كما في

الجدول (2-31):

109-100	99-90	89-80	79-70	فئات الانفاق الشهري
4	1	3	2	عدد الاسر

جدول (2 - 31)

المطلوب إيجاد مايلي:

أ) إيجاد الربيع الأدنى بالطريقة الحسابية الاولى والثانية.

ب) إيجاد الربيع الأعلى بالطريقة الحسابية الأولى والثانية.

ج) إيجاد الربيع الأدنى والأعلى بالطريقة البيانية

الحل: أ) إيجاد الربيع الأدنى بالطريقة الحسابية الاولى والحسابية الثانية

نشكل جدول تكراري متجمع صاعد (2 - 32)

فئات الاتفاق الكلي	عدد الاسر	الفئات الفعلية	نهاية الفئات	تكرار المتجمع صاعد
69-60	∴	69.5-59.5	69.5>	∴
79-70	2	79.5-69.5	79.5>	2 ترتيب الربع الأدنى
89-80	3	89.5-79.5	89.5>	5
99-90	1	99.5-89.5	99.5>	6 ترتيب الربع الأعلى
109-100	4	109.5-99.5	109.5>	10
المجموع	10			

جدول (2 - 32)

نجد ترتيب الربع الأدنى  $= \frac{25}{100} \times \text{مجموع التكرارات}$

$$2.5 = 10 \times \frac{25}{100}$$

فئة الربع الأدنى وهي التي تقع أسفل السهم مباشرة = 79.5-89.5 أو فوق السهم في عمود نهاية الفئات.

الحد الأدنى للفئة الربعية = 79.5

طول الفئة الربعية = 89.5-79.5 = 10

التكرار المتجمع السابق = 2

التكرار المتجمع اللاحق = 5

إيجاد الربع الأدنى حسب العلاقة.

$$\text{الربع الأدنى} = 79.5 + \frac{2-2.5}{2-5} \times 10$$

$$81.17 = 167 + 795 = \frac{5}{3} + 79.5 - 10 \times \frac{05}{3} + 79.5 =$$

## إيجاد الربيع الأدنى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد	الفئة الربيعية
$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 5 \end{bmatrix} 0.5$	$10 \begin{bmatrix} 79.5 \\ \text{الربيع الأدنى} \\ 89.5 \end{bmatrix} \text{ س}$
	$\frac{0.5}{3} = \frac{\text{س}}{10}$

نتيجة للضرب التبادلي فان  $5 = 3 \text{ س} \Leftrightarrow \text{س} = 1.67$

الربيع الأدنى = الحد الأدنى للفئة الربيعية + قيمة س

$$81.17 = 1.67 + 79.5$$

## (2) إيجاد الربيع الأعلى بالطريقة الحسابية الأولى والثانية

إيجاده بالطريقة الأولى

$$7.5 = \frac{750}{100} = 10 \times \frac{75}{100} = \text{نجد ترتيب الربيع الأدنى}$$

$$\text{الفئة الربيعية} = 99.5 - 109.5$$

$$\text{الحد الأدنى} = 99.5$$

$$\text{طول الفئة} = 109.5 - 99.5 = 10$$

التكرار المتجمع الصاعد السابق = 6

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق = 10

نجد الربيع الأعلى من العلاقة التالية:

$$\text{الربيع الأعلى} = 99.5 + \frac{6-75}{6-10} \times 10 = 99.5 + 15 \times \frac{15}{4}$$

$$103.25 = 3.75 + 99.5 = \frac{15}{4} + 99.5 =$$

إيجاد الربيع الاعلى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة الربيعية

$$4 \begin{bmatrix} 6 \\ 7.5 \\ 10 \end{bmatrix} 1.5 \quad \text{س} \quad \begin{bmatrix} 99.5 \\ \text{الربيع الاعلى} \\ 109.5 \end{bmatrix} 10$$

$$\frac{15}{4} = \frac{\text{س}}{10}$$

بالضرب التبادلي  $4\text{س} = 15$

$$\text{س} = \frac{15}{4} = 3.75$$

الربيع الاعلى = الحد الادنى للفئة الربيعية + قيمة س

$$103.25 = 99.5 + 3.75 =$$

ب- طريقة إيجاد الربيع الادنى والاعلى بياناً

وهذا هو المطلوب (3) من مطالب السؤال السابق وتبع الخطوات التالية:

- نرسم محورين متعامدين . ثم نرصد على المحور الافقي الحدود العليا للفئات وعلى

المحور الرأسى التكرارات المتجمعة الصاعدة.

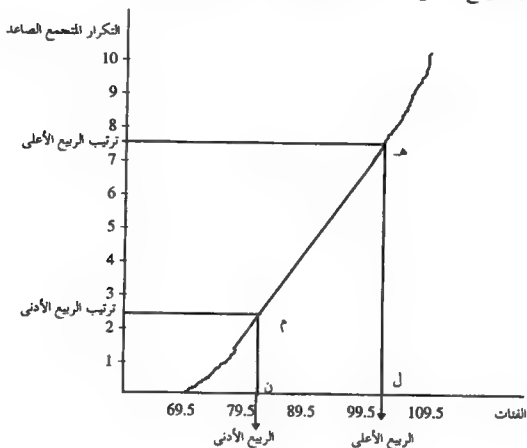
- نعين النقاط التي احداثياتها الاولى يمثل الفئات والاحداثى الثانى يمثل التكرار.

- نصل بين النقاط المعينة بخط منحن فيتكون لدينا منحنى تكرارى متجمع صاعد.

- نجد ترتيب الربيع الادنى ثم نعيه على المحور الرأسى ونقيم من نقطة التعيين عموداً

على المحور الرأسى فيقطع المنحنى في نقطة مثل م.

- نزل من النقطة م عموداً على المحور الافقي فيقطعه في نقطة ن فيتعين عندها قيمة الربيع الأدنى وفي مثالنا نجد من الرسم ان قيمة الربيع الأدنى هي 81.17 وبالمثل فإن الربيع الأعلى هو 103.25 تقريباً انظر الى الشكل (2 - 7)



شكل (2 - 7)



## تمارين عامة على الوحدة الثانية

س 1 : البيانات التالية تمثل فئات الاوزان لـ 100 طالب مينة بالجدول التالي .

فئات الاوزان	عدد الطلاب
-40	8
-45	18
-50	44
-55	20
65-60	10

المطلوب: ايجاد ما يلي

(1) الوسط الحسابي باي طريقة (2) الوسيط باي طريقة

(3) النوال باي طريقة (4) العشير الثالث.

(5) المئين السبعون . (6) الربيع الثالث.

(7) الربيع الأول

س 2 : البيانات التالية تمثل الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبنوبة بالجدول:

فئات الاجر	44-40	49-45	54-50	59-55	64-60
عدد العمال	10	20	40	20	10

والمطلوب (1) رسم المنحنى التكراري لهذه البيانات

(2) ايجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

(3) إيجاد الوسيط لهذه البيانات بطريقة مختلفة.

(4) إيجاد المتوال لهذه البيانات بطريقة مختلفة.

(5) إيجاد م10%، م25%، م85%، م75%

س3: في عينة مكونة من (10) مفردات كانت قيم المشاهدات عن المتغير هي :-

$$\begin{aligned} & \text{س1} = 4, \text{س2} = 8, \text{س3} = 3, \text{س4} = 5, \text{س5} = 2, \text{س6} = 10, \text{س7} = 2, \text{س8} = 4, \\ & \text{س9} = 4, \text{س10} = 8. \end{aligned}$$

المطلوب (1) إيجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات

(2) تعيين قيمة الوسيط.

(3) حساب الوسط التوافقي لقيم المشاهدات س1، س2، س5

(4) إيجاد ل1، ل3، ع1، ع3، م80 لهذه المشاهدات. حيث ر1 : الربيع الأول،

ر3 : الربيع الثالث، ع2 : العشير الأول، ع3 : العشير الثالث، م80 : المثني الثمانون.

## الفصل الثالث

### مقاييس التشتت

#### مقدمة:

قبل الخوض في أهم مقاييس التشتت نرى لزوما توضيح فكرة التشتت واعطاء معنى واضح للتشتت.

معنى التشتت بشكل عام: هو تباعد القيم عن بعضها لكن هذا بدوره يحمل بطياته عدة تساؤلات لعدم تجانس البيانات في بعض اوقاته لذا اتفق على ان يكون هناك نقطة ثابتة لقياس التباعد او التقارب عن هذه النقطة ووجد ان الوسط الحسابي خير ممثل لهذه النقطة حيث ان غالبية النقاط تكون قريبة نحو هذه النقطة وقد يكون

- هذا البعد كبيرا أي ان البيانات مبعثرة.
- هذا البعد قليلا أي ان البيانات غير مبعثرة.
- او قد يكون هذا البعد متساوي أي لا يوجد تشتت ولعل أهم مقاييس التشتت نذكر منها ما يلي

#### 3-1- المدى

أ) المدى للبيانات غير المئوية : وهو اوسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة. ويمكن ايجاده من العلاقات التالية:

$$\text{المدى} = \text{اكبر قيمة} - \text{اصغر قيمة} \dots\dots\dots (3 - 1)$$

ملاحظة: قد تبرز في بعض البيانات بعض القيم المتطرفة كثيراً وبما ان المدى يعتمد على اكبر واصغر قيمة لذا فانه يتأثر مباشرة ويكون البعد كبيرا. لذا ينصح بحذف القيم المتطرفة الصغرى والكبرى. ويزر مقاييس تشتت مشابهة

للمدى نذكر منها :

(1) المدى المئتي = المئين الاعلى - المئين الادنى  
 = المئين التاسع والتسعون - المئين الاول =  $99م - 1م$   
 .....(2-3)

(2) نصف المدى المئتي =  $\frac{\text{المئين التاسع والتسعون} - \text{المئين الأول}}{2} = \frac{99م - 1م}{2}$   
 .....(3-3)

(3) المدى العشري = العشر التاسع - العشر الاول =  $9ع - 1ع$   
 =  $90م - 10م$   
 .....(4-3)

(4) نصف المدى العشري =  $\frac{\text{العشر التاسع} - \text{العشر الأول}}{2}$   
 .....(5-3)

نصف المدى العشري =  $\frac{9ع - 1ع}{2} = \frac{90م - 10م}{2}$   
 .....(6-3)

(5) المدى الربيعي = الربيع الاعلى - الربيع الادنى  
 =  $75م - 25م$   
 .....(7-3)

(6) نصف المدى الربيعي =  $\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$   
 =  $\frac{75م - 25م}{2}$   
 .....(8-3)

مثال(3-1): اذا كان لدينا البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب من 50 وهي :

39 ، 41 ، 21 ، 27 ، 34 ، 43 ، 25 ، 37 ، 28 ، 22

## والمطلوب إيجاد

(1) المدى المطلق (2) نصف المدى الربيعي

الحل : لإيجاد المدى المطلق نتبع ما يلي

- نرتب المشاهدات ترتيباً تصاعدياً

21	22	25	27	28	34	37	39	41	43
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

(1) المدى المطلق = أعلى مشاهدة - أصغر مشاهدة

$$22 - 21 - 43 =$$

(2) لإيجاد نصف المدى الربيعي.

أ) نجد الربيع الأدنى أو  $25^m$  كما يلي :

- ترتيب الربيع الأدنى من العلاقة التالية

$$275 = \frac{275}{100} = (1+10) \frac{25}{100} = \text{ترتيب الربيع الأدنى} =$$

- نجد موقع ترتيب الربيع ويقع بين الترتيب الثاني والثالث.

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الثاني والثالث وهما 22، 25 تكون قيمة الربيع

$$\text{الأول} = \frac{1}{2} (25 + 22) = 23.5$$

(2) لإيجاد الربيع الأعلى أي  $75^m$  باتباع الخطوات التالية

- نجد ترتيب الربيع الأعلى من العلاقة.

$$825 = \frac{825}{100} = (1+10) \frac{75}{100} = \text{ترتيب الربيع الأعلى} =$$

نجد موقع الترتيب من بين الترتيب فيقع بين الترتيب الثامن والتاسع

- نجد القيم المناظرة للترتيبين وهما 39، 41.

$$40 = \frac{1}{2} (41 + 39) = \text{فيكون قيمة الربيع الأعلى هي}$$

$$825 = \frac{165}{2} = \frac{23.5 - 40}{2} = \frac{25^m - 75^m}{2} = \text{وعليه فإن نصف المدى الربيعي}$$

(ب) إيجاد المدى المطلق للبيانات المبوبة :

نجد المدى المطلق من العلاقات التالية .

المدى المطلق = الحد الأعلى الفعلي للفترة العليا-الحد الأدنى الفعلي للفترة الدنيا ....(3-9)

وهناك علاقة أخرى :

....(3-10)

المدى المطلق = مركز الفئة العليا - مركز الفئة الدنيا

ولتجنب القيم المتطرفة حتى نحصل على مقياس تشتت له فاعلية نجد احد المقاييس الواردة في البند السابق وذلك حسب وجود القيم المتطرفة في البيانات. وستركز دراستنا على نوع منها وذلك نظرا لأهمية هذا المقياس واستخدامه في أكثر من مجال.

### 3-2) نصف المدى الربيعي وطرق ايجاده.

لقد استعرضنا في البند السابق كيفية إيجاد نصف المدى للبيانات غير المبوبة والآن نستخدم نفس الصيغ للقيم المبوبة.

الربيع الأعلى - الربيع الأدنى

2

= نصف المدى الربيعي

نصف المدى الربيعي =  $\frac{254 - 754}{2}$

ولتوضيح كيفية الاستخدام نورد المثال التالي :

مثال (3-2) : البيانات التالية تمثل الرواتب الشهرية ل 60 موظفاً يعملون في احد

المؤسسات مبوبة كما في الجدول (3-1)

فئات الرواتب	90-	100-	110-	120-	130-	140-	150-	المجموع
	99	109	119	129	139	149	159	
عدد الموظفين	5	9	11	17	11	3	2	60

جدول (3 - 1)

المطلوب: أ- إيجاد المدى المطلق

ب- إيجاد نصف المدى الربيعي

الحل: نكون جدول الحل (3 - 2)

مركز الفئة	التكرار المتجمع الصاعد	الحد الفعلي الاعلى	الحدود الفعلية	عدد الموظفين	فئات الرواتب
94.5	5	99.5 >	99.5-89.5	5	99-90
104.5	14	109.5 >	109.5-99.5	9	109-100
114.5	25	119.5>	119.5-109.5	11	119-110
124.5	42	129.5>	129.5-119.5	17	129-120
134.5	53	139.5>	139.5-129.5	11	139-130
144.5	58	149.5 >	149.5-139.5	5	149-140
154.5	60	159.5>	159.5-149.5	2	159-150
				60	المجموع

جدول (3 - 2)

المدى المطلق = الحد الاعلى للغة العيا - الحد الادنى للغة الدنيا

$$70 = 89.5 - 159.5 =$$

المدى المطلق عن طريق مراكز الفئات

$$60 = 94.5 - 154.5 =$$

ب- إيجاد نصف المدى الربيعي من العلاقة التالية

<p>الربيع الثالث - الربيع الأول</p> <p>نصف المدى الربيعي = <math>\frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الأول}}{2}</math></p>	<p>(11 - 3) .....</p>
--	-----------------------

أو أي من الصيغ السابقة الذكر وكلها تؤدي إلى نفس المفهوم.

1) نجد الربيع الاول باتباع الخطوات التالية :

- نجد ترتيب الربيع الاول وهو

$$\text{ترتيب الربيع الاول} = \frac{60 \times 25}{100} = 15$$

نحدد موقع الربيع الاول في عمود التكرار المتجمع الصاعد ونشير اليه بالسهم.

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة التي تقع اسفل السهم.

وهي 109.5-119.5

- نجد الحد الادنى للفئة = 109.5 .

- نجد الربيع الاول من العلاقة التالية.

$$\text{الربيع الاول} = 109.5 + 10 \times \frac{14 - 15}{14 - 25} = 110.4$$

2) نجد الربيع الثالث باتباع الخطوات التالية :

- نجد ترتيب الربيع الثالث

$$\text{ترتيب الربيع الثالث} = 60 \times \frac{75}{100} = 45$$

- نحدد موقع الترتيب على عمود المتجمع الصاعد.

- نشير الى الموقع بسهم .

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة الواقعة اسفل السهم

= 129.5-139.5

= نحدد الحد الادنى = 129.5

نجد الربيع الثالث من العلاقة التالية

$$\text{الربيع الثالث} = 129.5 + 10 \times \frac{42 - 45}{42 - 53}$$



$$- 129.5 + \frac{30}{11} = 129.5 + 2.73 = 132.23 \text{ باستخدام إعلالة أعلاه فإن}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{110.40 - 132.23}{2} = 10.915$$

### 3-3 : الانحراف المعياري :

لعمل هذا المقياس من أهم مقاييس التشتت وحتى نصل إلى مفهوم هذا المقياس فلا بد من استعراض المقاييس التالية والتي ستؤدي بدورها إلى مقياس الانحراف المعياري.

#### 3-3-1 : الانحراف المتوسط

**تعريف :** الانحراف المتوسط : هو مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة الانحراف عن الوسط الحسابي وهو يمثل متوسط القيم المطلقة لانحرافات قيم المشاهدات عن وسطها الحسابي. وقد تكون هذه المشاهدات.

#### (أ) المشاهدات أو البيانات غير مبوية :

ولإيجاد الانحراف المتوسط لهذه البيانات نتبع الخطوات التالية.

- نجد المتوسط الحسابي لقيم المشاهدات

- نجد الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي من العلاقة.

$$|x_i - \bar{x}| \text{ حيث } \bar{x} = \text{هو انحراف كل مشاهدة عن وسطها الحسابي}$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n} \dots (3-12)$$

حيث  $n$  عدد المشاهدات

**مثال (3-3):** اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية

7 ، 13 ، 16 ، 14 ، 10

الحل : حل مثل هذه المسائل تتبع الخطوات التالية

- نجد المتوسط الحسابي لمجموعة القيم

$$\bar{x} = \frac{60}{5} = \frac{10+14+16+13+7}{5} = 12$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات

$$|x_1 - \bar{x}| = |10 - 12| = 2$$

$$|x_2 - \bar{x}| = |13 - 12| = 1$$

$$|x_3 - \bar{x}| = |16 - 12| = 4$$

$$|x_4 - \bar{x}| = |14 - 12| = 2$$

$$|x_5 - \bar{x}| = |7 - 12| = 5$$

فيكون الانحراف المتوسط والذي سترمز له بالرمز أ.م.

$$\sigma = \frac{14}{5} = \frac{2+2+4+1+5}{5} = 2.8$$

ب- إذا كانت البيانات مبوبة

لذا تتبع الخطوات التالية

- نجد مراكز الفئات ولتكن  $x_1$  ،  $x_2$  ، ..... ،  $x_n$

- نجد الوسط الحسابي من العلاقة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j \cdot f_j}{\sum_{j=1}^n f_j}$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي على النحو

ح = سر - م ثم نأخذ القيمة المطلقة لتصبح :

$$|ح| = |سر - م|$$

- نجد حاصل ضرب  $|ح| \times ك$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

.....(13-3)

$$\frac{\sum_{i=1}^n |ح| \times ك}{\sum_{i=1}^n ك} = \text{أ.م} = \text{الانحراف المتوسط}$$

مثال (3-4): البيانات التالية تمثل اوزان مئة طالب مبنية كما في الجدول (3-3)

فئات الازان	-40	-45	-50	-55	-60	-65	المجموع
عدد الطلاب	7	18	40	20	10	5	100

جدول (3-3)

والمطلوب إيجاد الانحراف المتوسط لهذه الازان

الحل: نكون الجدول (3-4) التالي الذي يشمل جميع البيانات اللازمة للحل.

فئات الازان	عدد الطلاب ك	مركز الفئات سر	سر × ك	$ ح  =  سر - م $	$ ح  \times ك$
-40	7	42.5	297.5	$54.66 - 42.5$	$12.16 \times 7$
-45	18	47.5	855.0	$54.66 - 47.5$	$7.16 \times 18$
-50	40	52.5	2200	$54.66 - 52.5$	$2.16 \times 40$
-55	20	57.5	1151	$54.66 - 57.5$	$2.84 \times 20$
-60	10	62.5	625	$54.66 - 62.5$	$7.84 \times 10$
70-65	5	67.5	337.5	$54.66 - 67.5$	$12.84 \times 5$
المجموع	100		5466		499.8

جدول (3-4)

$$\text{نجد } \bar{s} \text{ من العلاقة } \frac{\sum_{i=1}^n s_i \times \text{كر}}{\sum_{i=1}^n \text{كر}} = \bar{s}$$

$$54.66 = \frac{5466}{100} =$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$4.998 = \frac{499.8}{100} = \frac{\sum_{i=1}^n |s_i - \bar{s}| \times \text{كر}}{\sum_{i=1}^n \text{كر}} = \text{أم -}$$

### 2-3 الانحراف المعياري.

تعريف الانحراف المعياري : هو الجذر التربيعي لمجموع مربعات الانحرافات عن وسطها الحسابي مقسوماً على حجم العينة.

ولابجاد الانحراف المعياري هناك حالتان

أ- اذا كانت البيانات غير مبوبة:

نتبع الخطوات التالية.

- نجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات من العلاقة.

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$$

- نجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابي أي .

$$ح1 = s_1 - \bar{s}$$

$$ح2 = s_2 - \bar{s}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$حن = s_n - \bar{s}$$

- نجد مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي أي.

$$x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$$

- نجد الانحراف المعياري عن طريق العلاقة التالية.

(14-3) ..... 
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

حيث  $\sigma$  تدل على الانحراف المعياري

إذا كان حجم العينة صغيراً فإن

(15-3)..... 
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{1 - n}}$$

إذا كان حجم العينة كبيراً ويقترب من حجم المجتمع فإن

(16-3)..... 
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

إذا كان حجم العينة مساوياً لحجم المجتمع الصغير.

(17-3)..... 
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{1 - n}}$$

إذا كان حجم العينة مساوياً لحجم المجتمع الكبير

والمقصود بحجم العينة أو المجتمع صغيراً إذا كانت  $n \geq 30$  ويكون كبيراً إذا كانت

$$n \leq 30.$$

**ملاحظة :** إذا أخذنا مربع كلا الطرفين فإننا نحصل على مقياس آخر يسمى التباين ولكن غالبا ما يستعمل هو الانحراف المعياري.

**مثال (3-5):** اوجد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية 3، 7، 11، 14، 5.

**الحل:** لإيجاد الانحراف المعياري نتبع الخطوات التالية :

$$\text{نجد } \bar{X} = \frac{5+14+11+7+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

- نجد الانحرافات ومربعاتها عن الوسط

$$X_1 = 5 - \bar{X} = 5 - 8 = -3 \quad , \quad X_1^2 = 9$$

$$X_2 = 14 - \bar{X} = 14 - 8 = 6 \quad , \quad X_2^2 = 36$$

$$X_3 = 11 - \bar{X} = 11 - 8 = 3 \quad , \quad X_3^2 = 9$$

$$X_4 = 7 - \bar{X} = 7 - 8 = -1 \quad , \quad X_4^2 = 1$$

$$X_5 = 3 - \bar{X} = 3 - 8 = -5 \quad , \quad X_5^2 = 25$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$s = \sqrt{\frac{9+36+9+1+25}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} \quad \text{وعليه}$$

$$s = 4 \quad \text{فيكون } s = 4 \quad \text{أي أن الانحراف المعياري} = 4$$

(ب) اذا كانت البيانات المعطاة مبوبة:

هناك عدة طرق لإيجاد الانحراف المعياري نذكر اهمها:

(1) الطريقة المطولة

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات للبيانات المبوبة.

- نجد الوسط الحسابي لهذه البيانات من العلاقة

$$\frac{\sum_{i=1}^n \text{سـ} \times \text{كـ}_i}{\sum_{i=1}^n \text{كـ}_i} = \overline{\text{سـ}}$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي

$$\begin{aligned} \text{حـ}_1 &= \text{سـ}_1 - \overline{\text{سـ}} \\ \text{حـ}_2 &= \text{سـ}_2 - \overline{\text{سـ}} \\ &\vdots \\ \text{حـ}_n &= \text{سـ}_n - \overline{\text{سـ}} \end{aligned}$$

- نجد مربعات الانحرافات

$$= \text{حـ}_1^2 = (\text{سـ}_1 - \overline{\text{سـ}})^2, \text{حـ}_2^2 = (\text{سـ}_2 - \overline{\text{سـ}})^2, \dots, \text{حـ}_n^2 = (\text{سـ}_n - \overline{\text{سـ}})^2$$

- نجد حاصل ضرب كل انحراف بالتكرار المقابل له أي نجد

$$\text{حـ}_1^2 \text{كـ}_1, \text{حـ}_2^2 \text{كـ}_2, \dots, \text{حـ}_n^2 \text{كـ}_n$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة

(18-3).....

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{كـ}_1 \text{حـ}_1^2 + \text{كـ}_2 \text{حـ}_2^2 + \dots + \text{كـ}_n \text{حـ}_n^2}{\sum_{i=1}^n \text{كـ}_i}}$$

أو

(19-3)...

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\text{سـ}_1 - \overline{\text{سـ}})^2 \text{كـ}_1 + (\text{سـ}_2 - \overline{\text{سـ}})^2 \text{كـ}_2 + \dots + (\text{سـ}_n - \overline{\text{سـ}})^2 \text{كـ}_n}{\sum_{i=1}^n \text{كـ}_i}}$$

ثم نقسم  $\sum_{i=1}^n \text{كـ}_i$  إذا كان حجم العينة صغيراً،  $\sum_{i=1}^n \text{كـ}_i - 1$  إذا كان حجم العينة كبيراً

مثال (3-6): البيانات التالية تمثل رواتب مئة موظف في إحدى الشركات مبوبة كما في الجدول (3-7).

فئات الرواتب	79-70	89-80	99-90	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الموظفين	5	7	21	33	18	13	3	100

### جدول (3-7)

والمطلوب إيجاد التباين وكذلك الانحراف المعياري لهذه المشاهدات

الحل: نكون الجدول (3-8) والمحتوي على كافة البيانات اللازمة للحل

فئات الرواتب	التكرار كـ	مركز الفئات سـ	سـ.كـ	حـ=سـ.رـ.صـ	ح <sup>2</sup> ر	ح <sup>2</sup> ر.كـ
79-70	5	74.5	372.5	ح <sup>1</sup> =30.3-104.8-74.5	918.09	4590.45
89-80	7	84.5	591.5	ح <sup>2</sup> =20.3	412.09	2884.63
99-90	21	94.5	1984.5	ح <sup>3</sup> =10.3	106.09	2227.89
109-100	33	104.5	3448.5	ح <sup>4</sup> =0.3	0.09	0002.97
119-110	18	114.5	2061.0	ح <sup>5</sup> =9.7	94.09	1693.62
129-120	13	124.5	1618.5	ح <sup>6</sup> =19.7	388.09	5045.17
139-130	3	134.5	403.5	ح <sup>7</sup> =29.7	882.09	2646.27
	100		10480			19091.0

### جدول (3-8)

$$\bar{x} = \frac{10480}{100} = 104.8$$

نجد المتوسط الحسابي من



نجد التباين من العلاقة

$$\frac{19091}{99} = \frac{19091}{1-100} = \frac{\sum_{r=1}^n (م-م)^2 \times ك}{\sum_{r=1}^n ك} = ع^2$$

$$ع^2 \approx 192.84$$

فيكون الانحراف المعياري بهذه الطريقة .

$$ع = \sqrt{ع^2} = \sqrt{192.84}$$

$$= 13.89$$

(2) إيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

لإيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي نتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات مـ

- نأخذ احد مراكز الفئات الموجودة سابقاً كوسط فرضي وليكن (أ) غالباً ما يكون مركز الفئة المقابل للأكثر تكراراً.

- نجد حـ - مـ - أ

- نجد حـ × ك ثم نجد  $\sum ح \times ك$

- نجد مربع حـ

- نجد مجموع حاصل ضرب  $ح^2 \times ك$  أي  $\sum ح^2 \times ك$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$(20-3) \dots\dots\dots \sigma = \sqrt{\left( \frac{\sum_{j=1}^n x_j^2 \times كُر}{\sum_{j=1}^n كُر} - \left( \frac{\sum_{j=1}^n x_j \times كُر}{\sum_{j=1}^n كُر} \right)^2 \right)}$$

هذا اذا كان مجموع التكرارات اقل من او يساوي 30 مفردة يكون الانحراف المعياري اكثر دقة.

3- إيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات البسيطة المختصرة عن الوسط الفرضي.  
لإيجاد الانحراف المعياري تتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات سر.
- نجد الوسط الفرضي أ أحد مراكز الفئات.
- نجد الانحرافات عن الوسط الفرضي من العلاقة ح = سر - أ

$$(21-3) \dots\dots\dots - \text{نجد الانحرافات المختصرة } \bar{خ} = \frac{\sum \text{الانحرافات البسيطة}}{\text{طول الفئة}} = \frac{\sum ح}{ل}$$

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات المختصرة × التكرارات
- نربع الانحرافات المختصرة ثم نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات المختصرة × التكرارات أي

$$\sum خ^2 \times كُر$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية:

$$(22-3) \dots\dots\dots \sigma = \sqrt{\left( \frac{\sum_{j=1}^n خ_j^2 \times كُر}{\sum_{j=1}^n كُر} - \left( \frac{\sum_{j=1}^n خ_j \times كُر}{\sum_{j=1}^n كُر} \right)^2 \right)}$$

مثال (3-7): البيانات التالية تمثل علامات 100 طالب من 50 موزعة بالجدول (3-9).

فئات الدرجات	صفر-	-10	-20	-30	-40	المجموع
عدد الطلاب	2	5	27	47	19	100

جدول (3-9)

المطلوب إيجاد

- 1) الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.
- 2) الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي.

الحل: نكون جدول يشمل البيانات المطلوبة وهو جدول (3-10)

فئات العلامات	التكرار كـ	مركز الفئات سم	حـ	ح <sup>2</sup>	ح.كـ	ح <sup>2</sup> .كـ	حـ	ح.كـ	ح <sup>2</sup> .كـ	ح <sup>2</sup>	ح <sup>2</sup> .كـ
صفر-	2	5	-20	400	40-	800	2-	4-	4	8	
-10	5	15	10-	100	50-	500	1-	5-	1	5	
-20	27	25	∴	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	
-30	47	35	10	100	470	4700	1	47	1	47	
-40	19	45	20	400	380	7600	2	38	4	76	
المجموع	100					760		76		136	

جدول (3-10)

- 1- نبدأ بحل المطلوب الاول.
- نحدد الوسط الفرضي وليكن  $A = 25$  أحد مراكز الفئات.
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي.
- نجد مربع الانحرافات عن الوسط الفرضي.

- نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات في التكرارات = 13600

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات في التكرارات = 760

نجد الانحراف المعياري من العلاقة:

$$\sqrt{\frac{2\left(\frac{760}{99}\right) - \frac{13600}{99}}{}} = \varepsilon$$

$$8.86 = \sqrt{78.47} = \sqrt{58.9 - 137.37} =$$

(2) الحل بطريقة الانحرافات المختصرة.

- نتبع الخطوات السابقة حتى إيجاد الانحرافات.

- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة.

$\bar{X} = \frac{\sum x}{L}$  حيث  $L$  : طول الفئة.

- نجد  $\bar{X}^2$ .

- نجد حاصل ضرب  $\bar{X}$  كر = 76

- نجد مجموع حاصل ضرب  $\bar{X}^2$  كر = 136

- نجد الانحراف المعياري.

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2\left(\frac{76}{99}\right) - \frac{136}{99}}{}} L$$

$$0.78 \sqrt{10} = \sqrt{0.59 - 1.37} \sqrt{10} =$$

$$8.83 = 0.883 \times 10 =$$

نلاحظ ان النتيجةين متشابهتين في القيمة.

### 3-3-3: أثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري

نظرية: إذا اخضع الانحراف المعياري ع، التباين ع<sup>2</sup> للتحويل الخطي ق(س) = أس + ب فان الانحراف المعياري والتباين يتأثران بهذا التحويل ويصبح كل منهما كما في العلاقتين.

(25-3).....

$$\boxed{\text{عمر} = |أ| \cdot \text{عمر}}$$

حيث ع ص قيمة الانحراف المعياري بعد التأثير.

(26-3).....

$$\boxed{\text{ع}^2 = |أ|^2 \cdot \text{ع}^2}$$

حيث ع<sup>2</sup> ص: قيمة التباين بعد التأثير

مثال (3-8): اذا كان الانحراف المعياري لقيم المشاهدات = 4 وتباينها 16 خضعت لتحويل خطي حسب المعادلة.

$$\text{ص} = 0.3 \text{ س} + 7$$

المطلوب: حساب الانحراف المعياري والتباين بعد التعديل

الحل: نجد الانحراف المعياري من العلاقة

$$\text{ع ص} = |أ| \cdot \text{ع س}$$

$$8.2 = 7 + 1.2 = 7 + 4 \times 0.23 =$$

التباين بعد التعديل حسب العلاقة التالية

$$\text{ع}^2 \text{ ص} = 16 \times (0.7) =$$

$$16 \times 0.49 =$$

$$7.84 =$$

هناك طرق اخرى لايجاد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات غير المبوبة

(29-3).....

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \frac{(\sum x)^2}{n^2}}$$

مثال (3-9): أوجد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية

8 ، 12 ، 10 ، 5 ، 15

الحل: نكون جدول الحل (3 - 11)

س	س <sup>2</sup>
8	64
12	144
10	100
5	25
15	225
50	558

جدول (3 - 11)

$$\sigma^2 = \frac{558}{5} - \frac{(\frac{50}{5})^2}{5} = 111.6 - 100 = 11.6$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } \sigma = \sqrt{11.6} = 3.41$$

مثال (3-11): البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لمائة عامل مبينة كما يلي:

الفرقة	-20	-40	-60	-80	100-120
التكرار	8	12	45	20	15

والمطلوب : إيجاد الانحراف المعياري بطريقة المختلفة

الحل: نكون جدول الحل (3-12)

فئات	مراكز الفئات	التكرار	مركز مكرر	مكرر مكرر	(مكرر - مكرر) <sup>2</sup>	(مكرر - مكرر) <sup>3</sup>	مكرر <sup>2</sup>	مكرر	مكرر <sup>2</sup>	مكرر	مكرر <sup>2</sup>	مكرر <sup>3</sup>
-20	30	8	240	44.4	1971.36	15770.88	900	7200	40	320	1600	12800
-40	50	12	600	24.4	595.36	7144.32	2500	30000	20	240	400	4800
-60	70	45	3150	4.4	19.36	871.2	4900	32000	20	240	400	8000
-80	90	20	1800	15.6	243.36	4867.2	8100	162000	20	400	400	8000
120-100	110	15	1650	35.6	1267.36	19010.4	12100	181500	40	600	1600	24000
		100	7440			47664		601200		440		49600

جدول (3 - 12)

الطريقة الأولى : الانحرافات البسيطة عن الوسط الحسابي.

نجد أولاً:

$$\bar{x} = \frac{7440}{100} = 74.4$$

$$s^2 = \frac{47664}{100} = 476.64 \quad \text{التباين}$$

$$s = \sqrt{476.64} = 21.83 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

$$\text{طريقة ثانية: باستخدام العلاقة } s^2 = \frac{\sum (x_k - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x_k^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \frac{601200}{100} - \left(\frac{7440}{100}\right)^2 = 5535.36 - 6012 = 476.64 \quad \text{التباين}$$

$$ع = 21.83 \text{ الانحراف المعياري } ع^2 = \left( \frac{\sum_{r=1}^K \bar{X}_r}{\sum_{r=1}^K K} \right)^2 - \frac{\sum_{r=1}^K \bar{X}_r^2}{\sum_{r=1}^K K}$$

طريقة ثالثة : باستخدام العلاقة

$$ع^2 = \frac{49600}{100} - \left( \frac{440}{100} \right)^2 = 496 - 19.36 = 476.64$$

$$\sqrt{476.64} = ع \text{ الانحراف المعياري ع}$$

$$ع = 21.83$$

### 3-3-4 التباين التجميعي: (Poaled Variance) والانحراف التجميعي

لو أخذنا من مجتمعات عددها (ن) عينات ذوات الحجوم (ن<sub>1</sub>، ن<sub>2</sub>، .....، ن<sub>ن</sub>) ومن هذه العينات حسبنا (س<sub>1</sub>، س<sub>2</sub>، .....، س<sub>ن</sub>) و (ع<sub>1</sub><sup>2</sup>، ع<sub>2</sub><sup>2</sup>، .....، ع<sub>ن</sub><sup>2</sup>) فان متوسط متوسطات العينات المرجحة بحجم العينة:

$$\frac{\sum_{r=1}^n \bar{X}_r \cdot n_r}{\sum_{r=1}^n n_r} = \mu \quad \dots\dots\dots (30-3)$$

$$\frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2 + \dots + n_n \bar{X}_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} = \mu \quad \dots\dots\dots (31-3)$$

حيث : ن<sub>ر</sub> س<sub>ر</sub> مجموع القيم.

ن<sub>ر</sub>: عدد القيم



ومنه فإن:-

$$\begin{aligned} (32-3) \dots\dots\dots & \sqrt{\frac{\sum (1-r_j)^2 \bar{e}_j + \sum (\bar{\mu} - \bar{r}_j)^2}{(1-r_j) \sum}} = \sigma \\ (33-3) \dots\dots\dots & \sqrt{\frac{\sum (1-r_j)^2 \bar{e}_j + \sum (\bar{\mu} - \bar{r}_j)^2}{(1-r_j) \sum}} = \sigma \end{aligned}$$

حيث ك يمثل عدد العينات.

مثال (3-12) : اذا كانت لدينا العينات التالية كما في جدول (3-13):-

III	II	I	
200	300	100	ن
60	55	65	$\bar{r}$
64	81	49	$\bar{e}^2$

جدول (3-13)

المطلوب : (1) إيجاد الوسط التجميعي  $\mu$ .

(2) الانحراف المعياري التجميعي.

الحل : بتطبيق العلاقة أعلاه.

$$\frac{\sum_{j=1}^n \bar{r}_j \cdot n}{\sum_{j=1}^n n} = \mu$$

$$58.3 = \frac{35000}{600} = \frac{200 \times 60 + 300 \times 55 + 100 \times 65}{600} =$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mu_j - \bar{\mu})^2 \cdot n_j}{(n - k)}}$$

$$\sqrt{\frac{6422.2 + 3333.3 + 4444.4 + (199)(64) + (81)(299) + (99)49}{3 - 600}}$$

$$93.81 = 9.69 \text{ أما التباين التجميعي فهو } 93.81 = \sqrt{\frac{56006}{597}}$$

(34-3).....

عدد درجات الحرية = عدد القيم المستقلة =  $n - 1$

$\bar{S}$  يحدد قيمة واحدة من القيم ، والقيم الباقية تكون مستقلة.

## الوحدة الرابعة

### العزوم والتفرطح والالتواء

#### 1-4 : العزوم :

وإستخدم العلماء مبدأ العزوم (Momenis) للاستدلال على الالتواء، والعزم درجات، مما يقودنا لتعريف العزم الواوي بالعلاقة:

(1-4).....

$$M_r = \sum (M_r - 1) d_r^2$$

ويسمى (م) بالعزم الواوي حول الثابت (أ) وقد يكون هذا الثابت:-

(1) أ= صفرا. وتسمى بذلك العزوم حول الصفر ويرمز لها بالرمز (م<sub>0</sub>). فإذا كانت

(2-4).....

$$M_1 = \sum M_r d_r = \bar{M}_1$$

$$\bar{M}_1 = \sum M_r d_r$$

$$M_2 = \sum M_r d_r^2 = \bar{M}_2$$

(3-4).....

$$\bar{M}_2 = \sum M_r d_r^2$$

$$M_3 = \sum M_r d_r^3 = \bar{M}_3$$

(4-4).....

$$\bar{M}_3 = \sum M_r d_r^3$$

$$و=4 \leftarrow \sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م)$$

(5-4).....

$$\sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م)$$

(2) أما إذا كان الثابت أ هو الوسط الحسابي نسمي ذلك العزوم حول الوسط الحسابي ويرمز لها بالرمز (م). وتصبح العلاقة:

(6-4).....

$$\sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م)$$

$$و=1 \leftarrow \sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م) = \text{صفر}$$

(7-4).....

$$\sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م) = \text{صفر}$$

$$و=2 \leftarrow \sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م)^2$$

(8-4).....

$$\sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م)^2 = \text{ع}^2$$

$$و=3 \leftarrow \sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م)^3$$

(9-4).....

$$\sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م)^3 = \text{م}^3$$

$$و=4 \leftarrow \sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م)^4$$

(10-4).....

$$\sum_{\text{م}}^{\text{م}} = \sum_{\text{م}}^{\text{م}} (م - م)^4 = \text{م}^4$$

وتستخدم هذه العزوم للتعبير عن (م)، (ت)، ع<sup>2</sup>.

وبذلك فاننا نستطيع التعبير عن المعادلة السابقة ع<sup>2</sup> = ت<sup>2</sup> - م<sup>2</sup> بدلالة العزوم

حيث أن: ع<sup>2</sup> = م<sup>2</sup>، ت<sup>2</sup> = م<sup>2</sup>، م<sup>2</sup> = م<sup>2</sup>، وبالتعويض في العلاقة نحصل على:

$$\text{ع}^2 = \text{م}^2 - \text{م}^2 \text{ أو}$$

(11-4).....

$$\text{ع}^2 = \text{م}^2 - \text{م}^2$$

ويمكننا أيضا إيجاد قيمة (3م) بنفس الطريقة:

$$\begin{aligned}
 & \left( \overline{3} \overline{3} \overline{3} \right) \overline{3} = \frac{1}{\overline{3}} = 3\overline{3} \\
 & \left( \overline{3} \overline{3} \overline{3} \overline{3} + \overline{3} \overline{3} \overline{3} \overline{3} + \overline{3} \overline{3} \overline{3} \overline{3} \right) \overline{3} = \frac{1}{\overline{3}} = \\
 & \left[ \overline{3} \overline{3} \overline{3} - (\overline{3} \overline{3} \overline{3})^2 \overline{3} + (\overline{3} \overline{3} \overline{3}) \overline{3} \overline{3} \overline{3} - \overline{3} \overline{3} \overline{3} \overline{3} \right] \frac{1}{\overline{3}} = \\
 & \left[ \overline{3} \left( \frac{\overline{3} \overline{3}}{\overline{3}} \right) \overline{3} - (\overline{3} \overline{3} \overline{3})^2 \left( \frac{\overline{3} \overline{3}}{\overline{3}} \right) \overline{3} + (\overline{3} \overline{3} \overline{3}) \left( \frac{\overline{3} \overline{3}}{\overline{3}} \right) \overline{3} \overline{3} \overline{3} - \overline{3} \overline{3} \overline{3} \overline{3} \right] \frac{1}{\overline{3}} = \\
 & \overline{3} \left( \frac{\overline{3} \overline{3}}{\overline{3}} \right) \overline{3} - \left( \frac{\overline{3} \overline{3}}{\overline{3}} \right) \overline{3} + \left( \frac{\overline{3} \overline{3}}{\overline{3}} \right) \left( \frac{\overline{3} \overline{3}}{\overline{3}} \right) \overline{3} - \overline{3} \overline{3} \overline{3} = \\
 & (12-4) \dots \dots \dots \boxed{\overline{3} \overline{3} \overline{3} \overline{3} + \overline{3} \overline{3} \overline{3} \overline{3} - \overline{3} \overline{3} \overline{3} \overline{3} = \overline{3} \overline{3}}
 \end{aligned}$$

ويمكننا أيضا إيجاد (4م) وب نفس الطريقة

$$\begin{aligned}
 & \left( \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} \right) \overline{4} = \frac{1}{\overline{4}} = 4\overline{4} \\
 & \left( \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} + \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} + \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} + \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} \right) \overline{4} = \frac{1}{\overline{4}} = \\
 & \left[ \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} + (\overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4})^2 \overline{4} - (\overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4})^2 \overline{4} + (\overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4}) \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} - (\overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4}) \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} \right] \frac{1}{\overline{4}} = \\
 & \left[ \overline{4} \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} + (\overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4})^2 \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} - (\overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4})^2 \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} + (\overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4}) \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} - (\overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4}) \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} \overline{4} \overline{4} \overline{4} \right] \frac{1}{\overline{4}} = \\
 & \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} + \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} - \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} + \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \left( \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} \right) \overline{4} = \frac{\overline{4} \overline{4}}{\overline{4}} =
 \end{aligned}$$

(13-4) .....

$$\bar{x}_1^4 - 3\bar{x}_2^2 \times \bar{x}_1^2 + 6\bar{x}_3 + \bar{x}_1^4 - 4\bar{x}_4$$

(14-4) .....

$$\bar{x}_1^4 - 3\bar{x}_2^2 \times \bar{x}_1^2 + 6\bar{x}_3 + \bar{x}_1^4 - 4\bar{x}_4 = \bar{x}_4$$

وقد خلص العلماء من خلال ابحاث كثير في العزوم الى إيجاد معامل سمي بمعامل التفرطح والذي سنرمز له بالرمز  $\alpha_2$ .

#### 4-2 معامل التفرطح:

يمكن قياس تفرطح منحنى معين من خلال معامل سمي بمعامل التفرطح والذي يمكن ايجاده من خلال العلاقة التالية:

(15-4) .....

$$\frac{\bar{x}_4}{\bar{x}_2^2} = \alpha_2$$

فاذا كان:-

$$3 = (\alpha_2) \Leftrightarrow \text{المنحنى معتدل التفرطح}$$

$$3 > (\alpha_2) \Leftrightarrow \text{المنحنى مفطح}$$

$$3 < (\alpha_2) \Leftrightarrow \text{المنحنى مدبب}$$

وكمثال على اتفرطح فإن التوزيع الطبيعي له منحنى معتدل التفرطح لأن  $\alpha_3 = 3$

#### 4-3 الالتواء (SKEWNESS)

تعريف: وهو انثناء التماثل، ومن الناحية الاحصائية هو عدم وجود تماثل، ويمكن قياسها عن طريق (س، و، م).

حيث :-

$$\bar{m} - \bar{m} > \therefore \Leftrightarrow \text{الالتواء سالب.}$$

$$\bar{m} - \bar{m} < \therefore \Leftrightarrow \text{الالتواء موجب.}$$

ومقياس الالتواء هذا يسمى بمعامل الالتواء وهو قيمة نسبية غير متأثرة بوحدات القياس.

ويمكن حساب معامل الالتواء عن طريق:-

(1) الوسط الحسابي ( $\bar{m}$ ) والوسيط ( $o$ ) والمتوال ( $m$ )

⇐ يعطينا معامل بيرسون الأول .

(16-4).....

$$\frac{\bar{m}-o}{\epsilon} = {}_1\alpha$$

(17-4).....

$$\frac{(o-\bar{m})^3}{\epsilon} = {}_1\alpha$$

(18-4).....

$$\frac{(m-o)^3}{\epsilon^2} = {}_1\alpha$$

وهذه صور مختلفة من معامل بيرسون الأول

(2) باستخدام الربيعات (1)، (2)، (3)

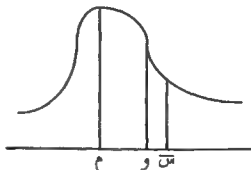
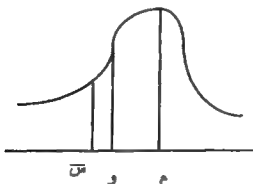
⇐ يعطينا معامل بيرسون الثاني

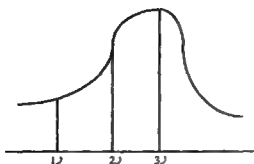
(19-4) .....

$$\frac{(r_1-r_2)-(r_2-r_3)}{r_1-r_3} = {}_2\alpha$$

(20-4) .....

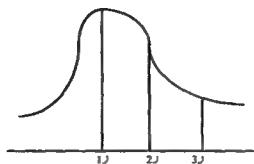
$$\frac{r_1+r_2-2r_3}{r_1-r_3} = {}_2\alpha$$





$$1J - 2J > 2J - 3J$$

الالتواء سالب.



$$1J - 2J < 2J - 3J$$

الالتواء موجب.

مثال (4-1): جد معامل الالتواء بطرقه المختلفة لفئات الأجر التالية:

فئات الأجر	-40	-60	-80	-100	-120	المجموع
ت	8	12	20	8	2	50

علماً بأن:

$$س = 83.6, د = 85, م = 88, ر = 67.5, 2 = 85, 3 = 97.5, ع = 20.95$$

$$0.21 = \frac{88 - 83.6}{20.95} = \frac{م - س}{ع} = \alpha_1$$

$$0.21 = \frac{(85 - 83.6)^3}{20.95} = \frac{(د - س)^3}{ع} = \alpha_1$$

$$0.22 = \frac{(88 - 85)^3}{(20.95)^2} = \frac{(م - د)^3}{ع^2} = \alpha_1$$

$$0.2 = \frac{170 - 165}{30} = \frac{67.5 + (85)^2 - 97.5}{67.5 - 97.5} = \frac{1J + 2J^2 - 3J}{1J - 3J} = \alpha_2$$

حيث يأخذ  $\alpha_1$  إشارة (م) فإذا كانت :-

$\alpha_1 = 0$  : التوزيع متماثل



$(\alpha_1) > \therefore \Leftarrow$  الائتواء سالب

$(\alpha_1) < \therefore \Leftarrow$  الائتواء موجب

حيث  $\alpha_1$  ترمز الى معامل الائتواء

هناك طريقة أخرى لإيجاد معامل الائتواء خلص إليها العلماء باستخدام العزوم بأن أوجدوا معامل التواء  $\alpha_1$  من العلاقة:

$$\alpha_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^3} \dots\dots\dots (21-4)$$

والآن نورد مثلاً شاملاً لذلك.

مثال (4-2): البيانات التالية تمثل فئات الاجر الاسبوعي لـ 50 عامل مبينة كما يلي:

فئات الاجر	-40	-60	-80	-100	140-120
التكرار	8	12	20	8	2

المطلوب : (1) إيجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول ص

(2) إيجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول الصفر

(3) معامل التفرطح ونوعه.

(4) معامل الائتواء ونوعه.

الحل: نكون جدول الحل التالي.

الفئات	لتر	ص	ص <sup>2</sup>	ص <sup>3</sup>	ص <sup>4</sup>
-40	8	50	2500	125000	6250000
-60	12	70	4900	343000	24010000
-80	20	90	8100	729000	65610000
-100	8	110	12100	1331000	146410000
-120	2	130	16900	2197000	285610000
المجموع	50				

فئات	ك	م	م	م <sup>2</sup> ك	م <sup>3</sup> ك	م <sup>4</sup> ك
-40	8	50	400	20000	1000000	50000000
-60	12	70	840	58800	4116000	288120000
-80	20	90	1800	162000	14580000	1312200000
-100	8	110	880	96800	10648000	1171280000
-120	2	130	260	33800	4394000	571220000
المجموع	50	-	4180	371400	34738000	3392820000

ح	ح ك	ح <sup>2</sup> ك	ح <sup>3</sup> ك	ح <sup>4</sup> ك	ح <sup>5</sup> ك	ح <sup>6</sup> ك
40-	320-	12800	512000-	20840000	2-	16-
20-	240-	4800	96000-	1920000	1-	12-
0	0	0	0	0	0	0
20	160	3200	64000	1280000	1	8
40	80	3200	128000	5120000	2	4
	320-	24000	416000	29160000	/	16-

ح <sup>2</sup> ك	ح <sup>3</sup> ك	ح <sup>4</sup> ك	(م-م) ك	(م-م) ك <sup>2</sup>	(م-م) ك <sup>3</sup>	(م-م) ك <sup>4</sup>
32	64	128	-268.8	9031.68	303464.448	10196405.45
12	12-	12	-163.2	.2219	30185.472	410522.4192
0	0	0	128	819.2	5242.88	33554.432
8	8	8	211.2	5575.68	147197.952	3886025.933
8	16	32	212.8	4305.92	199794.688	9270473.523
60	52-	180		21952	685885.44	23796981.76

$$83.6 = \frac{4180}{50} = \sum_{\text{ك}} \frac{1}{\text{ك}} = {}_1\text{م}' \quad (1)$$

$$7428 = \frac{371400}{50} = \sum_{\text{ك}^2} \frac{1}{\text{ك}} = {}_2\text{م}' \quad (2)$$

$$69476 = \frac{34738000}{50} = \sum_{\text{ك}^3} \frac{1}{\text{ك}} = {}_3\text{م}' \quad (3)$$

$$67856400 = \frac{3392820000}{50} = \sum_{\text{ك}^4} \frac{1}{\text{ك}} = {}_4\text{م}' \quad (4)$$

$$83.6 = 90 + \frac{320-}{50} = \sum_{\text{ك}} \frac{1}{\text{ك}} = {}_1\text{م}' \quad (5)$$

$$480 = \frac{204000}{50} = \sum_{\text{ك}^2} \frac{1}{\text{ك}} = {}_2\text{م}' \quad (6)$$

$$8320- = \frac{416000-}{50} = \sum_{\text{ك}^3} \frac{1}{\text{ك}} = {}_3\text{م}' \quad (7)$$

$$583200 = \frac{29160000}{50} = \sum_{\text{ك}^4} \frac{1}{\text{ك}} = {}_4\text{م}' \quad (8)$$

العزوم حول نقطة الأصل:

$$..32- = \frac{16-}{50} = \sum_{\text{ك}} \frac{1}{\text{ك}} = {}_1\text{م}^- \quad (9)$$

$$1.2 = \frac{60}{50} = \sum_{\text{ك}^2} \frac{1}{\text{ك}} = {}_2\text{م}^- \quad (10)$$

$$1.04- = \frac{52-}{50} = \sum_{\text{ك}^3} \frac{1}{\text{ك}} = {}_3\text{م}^- \quad (11)$$

$$3.6 = \frac{180}{50} = \sum_{\text{ك}^4} \frac{1}{\text{ك}} = {}_4\text{م}^- \quad (12)$$

العزوم حول الوسط الحسابي.

$$\therefore (\bar{m}_r - k_r) \geq \frac{1}{\sum k_r} = {}_1\alpha \quad (13)$$

$$439.04 = \frac{21952}{50} = k_r^2 (\bar{m}_r - k_r) \geq \frac{1}{\sum k_r} = {}_2\alpha \quad (14)$$

$$13717.7088 = \frac{685885.44}{50} = k_r^3 (\bar{m}_r - k_r) \geq \frac{1}{\sum k_r} = {}_3\alpha \quad (15)$$

$$475939.6352 = \frac{23796981.76}{50} = k_r^3 (\bar{m}_r - k_r) \geq \frac{1}{\sum k_r} = {}_4\alpha \quad (16)$$

وعليه فان معامل الالتواء باستخدام العزوم

$$\text{وهذا يعني أن المنحنى} \quad < 0.2 = \frac{8 \times 1.8817551}{8462748} = \frac{{}_1\alpha (13717.7088)}{{}_3^3 (439.04)} = \frac{{}_2^{\frac{2}{3}}\alpha}{{}_3^{\frac{3}{2}}\alpha} = {}_1\alpha$$

ملتو نحو اليمين

$$3 > 2.47 = \frac{475939.635}{192756.12} = \frac{475939.635}{{}_2^2 (439.04)} = \frac{{}_4^{\frac{4}{2}}\alpha}{{}_2^{\frac{2}{2}}\alpha} = {}_3\alpha$$

وهذا يعني ان المنحنى مفرطح

## الوحدة الخامسة

### التوزيع الطبيعي

1-5 : شكل المنحنى الطبيعي وخصائصه

1-1-5 شكل المنحنى الطبيعي

يتخذ المنحنى الطبيعي شكل الجرس ، وهو متماثل حول نقطة الوسط أي ان العمود النازل من اعلى نقطة في المنحنى على المحور الافقي يقسم المنحنى إلى منطقتين متساويتين كما هو موضح بالشكل (1-5) جانبا وهو يمثل التوزيع الطبيعي.

وهو من اهم التوزيعات الاحتمالية ودلته الاحتمالية:

$$ح(س) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{s - \mu}{\sigma} \right)^2} \quad (1-5) \dots\dots\dots$$

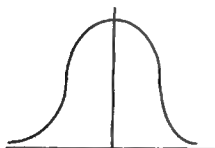
حيث:  $\pi$  النسبة التقريبية =  $\frac{22}{7}$  أو 3.14

$\sigma$ : الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي

هـ : العدد النيري = 2.718

$\mu$ : الوسط الحسابي للتوزيع

سر: قيمة المشاهدة



شكل (1-5)

2-1-5 : خصائص التوزيع الطبيعي

(1 شكله يشبه الجرس

(2) متمائل حول الوسط.

(3) الوسط الحسابي = الوسط = المتوال لهذا التوزيع

(4) المساحة تحت المنحنى الطبيعي = 1

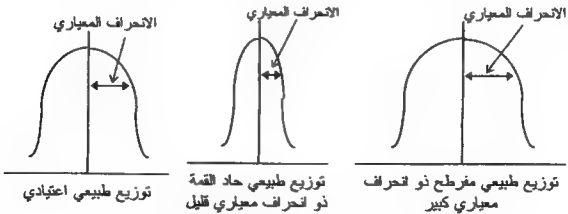
(5) تحديد نسبة أي جزء محصور بين قيمتين تحت المنحنى يتم بمعرفة الوسط والانحراف المعياري للتوزيع.

(6) تقل قيمة  $Y$  كلما اتجهت  $S$  نحو  $\infty$  ولكنها لا يمكن ان تصبح صفرا الا في اللانهاية. وهذا غير ملموس.

## 5-2 : التوزيع الطبيعي المعياري :

وحتى يكون التوزيع الطبيعي توزيعا معياريا فيتوجب ان يكون متوسطه الحسابي صفرا وتباينه 1. لذا فان خواص التوزيع الطبيعي المعياري هي نفس خواص التوزيع الطبيعي الاصلي اللهم الا زيادة الشرط الاخير وهو ان يكون وسطه الحسابي = صفرا. وتباينه يساوي 1.

وهناك صور اخرى لمنحنى التوزيع الطبيعي تعتمد على الانحراف المعياري للتوزيع. فكلما زاد الانحراف المعياري معنى ذلك انه الزيادة في تشتت البيانات عن وسطها الحسابي ولذا يزداد تفرطح المنحنى والاشكال التالية توضح هذا المفهوم:



شكل (4-5)

شكل (3-5)

شكل (2-5)

## 5-2-1 جداول التوزيع الطبيعي المعياري والمساحات :

(1) صممت هذه الجداول لتعمل على تخفيف عناء إيجاد مساحة معينة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

(2) المساهمة في إيجاد احتمال اية مشاهدة من مشاهدات التوزيع الطبيعي غير المعياري وذلك بتحويل قيم المشاهدات الى درجات معيارية من العلاقة.

$$Z_r = \frac{\bar{X} - \mu_r}{\sigma_r} \quad \text{.....(5-2)}$$

حيث  $\sigma_r$  قيمة المشاهدة،  $\bar{X}$  الوسط الحسابي للعينة،  $\sigma_r$  : الانحراف المعياري للعينة.

(3) يجب معرفة ان قيم  $Z_r$  للدرجات المعيارية واقعة بين  $-4 \leq Z_r \leq 4$  واية قيمة معيارية تزيد عن هذا الحد فيكون هناك خطأ حسابياً.

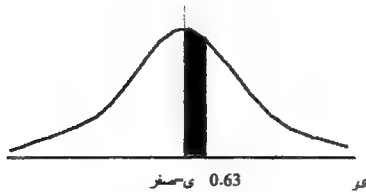
## 5-2-2 كيفية إيجاد المساحة تحت المنحنى باستخدام الجداول :

تتبع الخطوات التالية :

(1) نحول كل قيمة مشاهدة من التوزيع الطبيعي الى قيمة معيارية حسب العلاقة (5-2)  
(2) بعد الحصول على القيمة المعيارية نلجأ الى جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد القيم المقابلة حيث ان العمود الاول يمثل القيم المعيارية والافقي يشمل الجزئيات للقيم المعيارية وبعد القراءة الرأسية الى اسفل ثم افقي نجد القيم المناظرة المطلوبة والتي تدل على المساحة، والاحتمال المطلوب حيث أن المساحة هي بمثابة احتمال.

والجدول ادناه يمثل جزءا من الجدول الكلي ولو اردنا إيجاد القيمة المناظرة لـ  $Z = 0.63$  نقرأ رقم تقاطع القيمة الرأسية مع الافقية فتكون هي القيمة المناظرة لـ  $Z = 0.63$  ونلاحظ ان القراءة تشير الى 0.2357 وهذا يشير الى احتمال وقوع المشاهدة المناظرة لـ  $Z_r$  . وهي تمثل المساحة المشار لها في الشكل التالي ونلاحظ من الشكل (5-5) ان الخط المار بنقطة  $Z = 0$  صفر يقسم المساحة الكلية الى قسمين متساويين كل منهما 0.5000 وعند حساب مساحة تبدأ بالصفر. وتنتهي بقيمة  $Z$  فان المساحة المطلوبة

هي القيمة المأخوذة من الجدول ادناه كما اسلفنا في المثال السابق.



شكل (5-5)

اما اذا تصادف وجود قيمة معيارية سالبة فاننا نأخذ مثلتها الموجبة ونجدها من الجدول باستخدام خاصية التماثل المحوري:

حيث ان الجدول صمم فقط للقيم المعيارية الموجبة. والمساحة المحصورة عادة تحدها معطيات السؤال. والجدول التالي هو نموذج للجدول الطبيعي المعياري.

ي	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	,0000	,0040	,0080	,0120	,0160	,0199	,0229	,0279	,0319	,0359
0,1	,0398	,0438	,0517	,0557	,0596	,0636	,0675	,0714	,0753	
0,2	,0793	,0832	,0871	,0910	,0948	,0987	,1026	,1064	,1103	,1141
0,3	,1197	,1217	,1255	,1293	,1321	,1368	,1406	,1443		,1517
0,4	,1554	,1591	,1628	,1664	,1700	,1736	,1773	,1808	,1879	
0,5	,1915	,1950	,1985	,2019	,2054	,2088	,2123	,2157		,2224
0,6	,2257	,2291	,2324	,2357	,2389	,2422	,2454	,2486	,2517	,2549

### 5-2-3 : تطبيقات على حساب المساحات أو الاحتمالات :

يمكن اعطاء الأمثلة التالية لتغطي جميع ما ورد من ملاحظات:

مثال (5-1): أوجد الاحتمال لما يلي (مساحة المناطق المحددة بالقيم المعيارية)

أ) ح (ي > 1)      ب) ح (ي < 1)



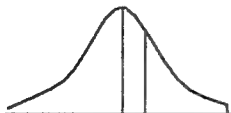
(ج)  $(0 < y < 2.3)$  ح (د)  $(-1.35 < y < 2.38)$

(هـ)  $(1.42 < y < 3.1)$

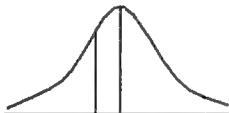
الحل: نبدأ بحل مثل هذه الأسئلة برسوم توضيحية للمنحنيات لتحديد المساحة المطلوبة ثم إيجادها من الجداول المعطاة

(أ) ح (ي > 1)  $0.1587 = 0.3413 - 0.5000$

= مساحة نصف المنحنى - المساحة الواقعة تحت ي = 1 وهنا نأخذ  
مثيلتها من الجدول المعطى كما في شكل (5-6)



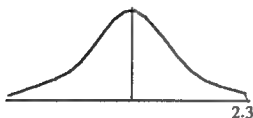
شكل (5-7)  
1+



شكل (5-6)  
1-

(ب) ح (ي < 1)  $0.1587 = 0.3413 - 0.5000$

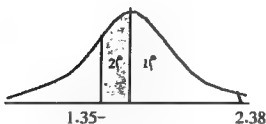
كما في شكل (5-7)



شكل (5-8)  
2.3

(ج) ح  $(0 < y < 2.3)$   $0.4893 =$

كما في شكل (5-8)



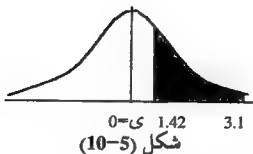
شكل (5-9)  
1.35- 2.38

(د) ح  $(-1.35 < y < 2.38)$

$$2\sigma + 1\sigma =$$

$$0.9028 = 0.4913 + 0.4115 =$$

كما في شكل (5-9)



هـ) إذا أوقعت المنطقة المطلوبة في جهة واحدة فتأخذ الفارق بين المساحتين كما في شكل (5-10). وعليه تصبح المساحة المطلوبة المحددة على النحو:

$$ح (1.42 > ي > 3.1) = 0.4990 - 0.4222 = 0.0768$$

مثال (5-2): تقدم عشرون ألف طالب لامتحان عام وكان توزيع علاماتهم قريبا من التوزيع الطبيعي، فإذا كان الوسط الحسابي للعلامات 70 والانحراف المعياري 5، فأوجد :-

- 1) عدد الطلاب الذين تقع علاماتهم بين 70 - 80 درجة
  - 2) عدد الطلاب الذين تقع علاماتهم بين 65 - 75 درجة
  - 3) عدد الطلاب الذين تقل علاماتهم عن 60
  - 4) عدد الطلاب الذين تزيد علاماتهم عن 80
  - 5) عدد الطلاب الذين تزيد علاماتهم عن 60
  - 6) عدد الطلاب الذين تقل علاماتهم عن 80 مع من تزيد أو تساوي 80
- الحل: 1) تحول القيمة العادية إلى قيمة معيارية باستخدام العلاقة (5-2)

$$ح \left( \frac{70-80}{5} > ي > \frac{70-70}{5} \right)$$

$$ح (0 < ي < \frac{10}{5}) = ح (0 < ي < 2)$$

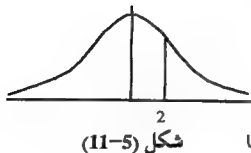
نأخذ هذه القيمة.

$$= 0.4773$$

وعليه فإن عدد الطلاب المطلوب.

$$\text{عدد الطلاب} = 20000 \times 0.4773 = 9546 \text{ طالبا}$$

كما هو موضح في شكل (5-11)



(2) نحول إلى القيمة المعيارية.

$$ح \left( \frac{70-75}{5} > ي > \frac{70-65}{5} \right)$$

$$- ح (1 > ي > -1)$$

ولأن القيم المعيارية محصورة بين قيمة

سالبة وموجبة

وعليه فإن المساحة المطلوبة عبارة عن منطقتين

$$م = م_1 + م_2 = 0.3413 + 0.4313$$

$$= 0.6826$$

$$\text{عدد الطلاب المطلوب} = 20000 \times 0.6826$$

$$= 13652 \text{ طالب}$$

كما هو موضح في شكل (5-12)

$$(3) ح \left( \frac{70-60}{5} > ي \right)$$

$$= ح (ي > 2)$$

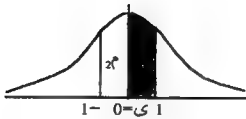
$$= 0.5000 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

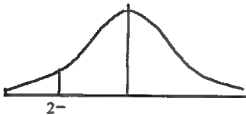
$$\text{عدد الطلاب المطلوب} = 20000 \times 0.0227$$

$$= 454 \text{ طالبا}$$

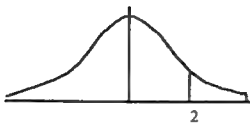
كما هو موضح في شكل (5-13)



شكل (5-12)



شكل (5-13)



شكل (14-5)

$$P\left(Y < \frac{70-80}{5}\right) = P(Y < -2) \quad (4)$$

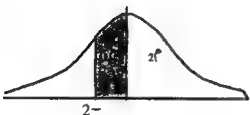
$$= 0.5000 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

عدد الطلاب المطلوب =  $20000 \times 0.0227$

$$= 454 \text{ طالبا}$$

كما هو موضح في شكل (14-5).



شكل (15-5)

$$P\left(Y < \frac{70-60}{5}\right) = P(Y < 2) \quad (5)$$

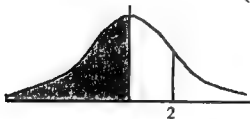
$$= 0.5000 + 0.4772$$

$$= 0.9773$$

عدد الطلاب =  $20000 \times 0.9773$

$$= 1546 \text{ طالبا}$$

كما هو موضح في شكل (15-5).



شكل (16-5)

$$P\left(Y > \frac{70-80}{5}\right) + P\left(Y < \frac{70-80}{5}\right) \quad (6)$$

$$P(Y > -2) + P(Y < 2)$$

$$= 0.9773 + 0.0227$$

$$= 1$$

$$= 20000 \text{ عددهم}$$

كما هو موضح في شكل (16-5).

وحدثاً استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري التجميعي ولتوضيح هذا الاستخدام

نورد مزيداً من الأمثلة مستخدمين الأسلوب التجميعي.

مثال (5-1): احسب الاحتمالات التالية باستخدام جدول التوزيع الطبيعي التجميعي:

$$(1) \text{ ح } (-1 > \text{ي} > 1) ,$$

$$(2) \text{ ح } (-1.35 > \text{ي} > 2.1)$$

$$(3) \text{ ح } (1.2 > \text{ي} > 3)$$

$$(4) \text{ ح } (1.2 < \text{ي})$$

$$(5) \text{ ح } (2.4 > \text{ي})$$

$$(6) \text{ ح } (-2 > \text{ي} > 2)$$

$$\text{الحل: (1) } \text{ح } (-1 > \text{ي} > 1) = \emptyset - (1) \emptyset - (-1) = 0.6826 - 0.1587 - 0.8413 =$$

$$(2) \text{ ح } (-1.35 > \text{ي} > 2.1) = \emptyset - (2.1) \emptyset - (-1.35) =$$

$$0.8936 - 0.0885 - 0.9821 =$$

$$(3) \text{ ح } (1.2 > \text{ي} > 3) = \emptyset - (3) \emptyset - (1.2) =$$

$$0.1138 - 0.8849 - 0.9987 =$$

$$(4) \text{ ح } (1.2 < \text{ي}) = 1 - \text{ح } (1.2 > \text{ي}) =$$

$$1 - 0.8849 = 0.1151$$

$$(5) \text{ ح } (2.49 > \text{ي}) = 0.9936 \text{ الإجابة مباشرة من الجدول}$$

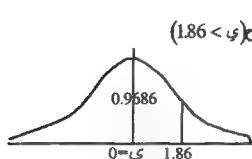
$$(6) \text{ ح } (-2 > \text{ي} > 2) = \emptyset - (2) \emptyset - (-2) =$$

$$-0.9772 - 0.0228 = 0.9544$$

مثال (5-4): اذا علم ان علامات مجموعة من الطلاب في احد الكليات تخضع

للتوزيع الطبيعي  $N(62, 49)$  فإذا اختير شخص ما بطريقة عشوائية ما احتمال انه قد حصل على علامة أكثر من 75.

الحل:  $\mu = 62, \sigma^2 = 49, \sigma = 7, \text{سر} = 75$  ثم نحول قيمة المشاهدة إلى قيمة معيارية.



شكل (5-11)

$$P(Y > 1.86) = P\left(\frac{Y - 62}{7} > \frac{75 - 62}{7}\right) = P\left(\frac{Y - 62}{7} > 1.86\right)$$

$$= 1 - P(Y \leq 1.86) = 1 - 0.9686 = 0.0314$$

$$= 0.0314$$

كما هو موضح في شكل (5-17)

مثال (5-5): احسب الاحتمالات التالية:

$$(1) P(Y < 2) \quad (2) P(1.4 < Y < 2.89) \quad (3) P(Y > 2.81)$$

$$(4) P(-1.35 < Y < 1.73) \quad (5) P(0 < Y < 0.97)$$

$$(6) P(Y > 2.1) \quad (7) P(Y > 2.85)$$

الحل:

$$(1) P(Y < 2) = P\left(\frac{Y - 62}{7} < \frac{2 - 62}{7}\right) = P\left(\frac{Y - 62}{7} < -8.57\right) = 0.0228$$

$$(2) P(1.4 < Y < 2.89) = P\left(\frac{1.4 - 62}{7} < \frac{Y - 62}{7} < \frac{2.89 - 62}{7}\right) = P(-8.71 < \frac{Y - 62}{7} < -8.99) = 0.0789$$

$$(3) P(Y > 2.81) = P\left(\frac{Y - 62}{7} > \frac{2.81 - 62}{7}\right) = P\left(\frac{Y - 62}{7} > -8.71\right) = 0.0025$$

$$(4) P(-1.35 < Y < 1.73) = P\left(\frac{-1.35 - 62}{7} < \frac{Y - 62}{7} < \frac{1.73 - 62}{7}\right) = P(-9.07 < \frac{Y - 62}{7} < -8.89) = 0.0885$$

$$= 0.0885 - 0.0582 = 0.0303$$

$$(5) \text{ ح } (0 > \text{ي}) = 0.197 - \emptyset = (0.97 - \emptyset) = (0) = 0$$

$$(6) \text{ ح } (\text{ي} > 2.1) = \emptyset = (2.1) = 0.9821$$

$$(7) \text{ ح } (\text{ي} < -2.85) = 1 - \emptyset = (2.85 - \emptyset) = 1 - 0.0022 = 0.9978$$

مثال (5-6): إذا كان عمر احد انواع البطاريات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 3

سنوات وانحراف معياري نصف سنة فاذا اختير من هذا الانتاج بطارية واحدة

عشوائية اوجد ح(س > 2.3 سنة)

$$\text{الحل: } \mu = 3, \sigma = \frac{1}{2}, \text{س} > 2.3$$

$$\text{ح} \left( \text{ي} > \frac{7}{5} \right) = \text{ح} \left( \text{ي} > \frac{3-2.3}{0.5} \right) = \text{ح} \left( \text{ي} > \frac{3-2.3}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \text{ح} (\text{ي} > 1.4) = \emptyset = (1.4 - \emptyset) = 0.0808$$

مثال (5-7): إذا علم ان علامات الطلاب في احد الكليات تتبع التوزيع الطبيعي

حيث N (14، 8) والمطلوب حساب

(1) احتمال العثور على شخص له علامة اقل من 72.

(2) احتمال الحصول على علامة أكثر من 80

(3) احتمال ان تكون له علامة تتراوح بين 60 - 70

(4) اذا منح اعلى من 8٪ من الطلبة على تقدير ممتاز ما هي العلامة التي تخول

الطالب للحصول على هذا التقدير.

(5) اذا اعتبر ما نسبته 12٪ من الطلبة راسباً ماهي علامة الرسوب.

$$\text{الحل: } \mu = 64, \sigma = 8$$

$$0.8413 = (1) \phi = (1 > y) \epsilon = \left( \frac{64 - 72}{8} > y \right) \epsilon \quad (1)$$

$$(2) \phi - 1 = (2 < y) \epsilon = \left( \frac{64 - 80}{8} < y \right) \epsilon \quad (2)$$

$$0.0228 = 0.99772 - 1 =$$

$$\left( \frac{64 - 70}{8} \geq y \geq \frac{64 - 60}{8} \right) \epsilon = (70 \geq y \geq 60) \epsilon = \quad (3)$$

$$(0.75 \geq y \geq 0.5 -) \epsilon = \left( \frac{6}{8} \geq y \geq \frac{4}{8} - \right) \epsilon =$$

$$(0.5 -) \phi - (0.75) \phi =$$

$$0.4649 = 0.3085 - 0.7734 =$$

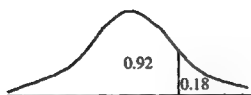
$$\frac{64 - \text{سر}}{8} = y \quad (4)$$

$$\frac{64 - \text{سر}}{8} = \frac{1.405}{1}$$

$$11.240 = 64 - \text{سر}$$

$$11.240 + 64.0 = \text{سر}$$

$$75.240 =$$



شكل (5-18)

وموضح ذلك في شكل (5-18)

$$\frac{64 - \text{سر}}{8} = y \quad (5)$$

$$\frac{64 - \text{سر}}{8} = \frac{1.175 -}{1}$$

$$-9.400 = 64 - \text{سر}$$

$$64 + 9.4 = \text{سر}$$



شكل (5-19)



=+54.6 علامة الرسوب

كما هو موضح في شكل (5-19)

مثال (5-8) : اذا علم ان للمتغير العشوائي  $x$  التوزيع الطبيعي متوسطه  $\mu = 50$  ، وتباينه  $\sigma^2 = 100$

المطلوب إيجاد احتمال ان هذا المتغير يقع بين 45 <  $x$  < 62

الحل: الاحتمال المطلوب  $P\left(\frac{50-45}{10} < Y < \frac{50-62}{10}\right) = P(-0.5 < Y < -1.2)$

$$= \Phi(-0.5) - \Phi(-1.2)$$

$$= 0.3085 - 0.8849 = 0.5764$$

مثال (5-9): اذا علم ان احد انواع البطاريات يعمل حتى 3 سنوات بالمتوسط

بأنحراف معياري  $\frac{1}{2}$  سنة فعلى اعتبار ان لعمر البطارية توزيع معتاد ماهو

احتمال ان يحصل على بطارية تعمر فترة اقل من 2.3 سنة.

الحل:  $\mu = 3$  سنة ،  $\sigma = 0.5$

$$P(x < 2.3) = P\left(Y < \frac{3-2.3}{0.5}\right) = P\left(Y < \frac{0.7}{0.5}\right)$$

$$= \Phi(1.4) = 0.9192 = 1 - 0.0808$$

مثال (5-10): اذا علم ان احد مصانع اللمبات يعمر بالمتوسط 800 ساعة وبأنحراف

معياري 40 ساعة اذا اخذت لمبة عشوائيا من انتاج هذا المصنع ما احتمال ان

تحترق بين 778 ، 834 ساعة .

الحل:  $\mu = 800$  ساعة ،  $\sigma = 40$  ساعة

$$P(778 < x < 834) = P\left(\frac{800-778}{40} < Y < \frac{800-834}{40}\right)$$

$$\left( \frac{34}{40} > \gamma > \frac{22}{40} \right) \sigma =$$

$$(0.85 > \gamma > 0.55) \sigma =$$

$$(0.55 - 0) \sigma - (0.85 - 0) \sigma =$$

$$0.5111 = 0.2912 - 0.8023 =$$

مثال (5-11): إذا كان متوسط العلامات في امتحان ما هو 74 علامة والانحراف

المعياري 7 وبناء على صيغة التعبير عن العلامة المطلقة بالتقدير بالحرف قرر

المدرس ان يعطي تقدير أ لأعلى 12٪ من الطلبة.

المطلوب: على اعتبار ان للعلامات توزيع الطبيعي حساب اقل علامة تؤهل الطالب

للحصول على هذا التقدير

$$\text{الحل: } \mu = 74 \quad \sigma = 7$$

نحسب أولاً القيمة المعيارية من المعطيات

$$\sigma(\gamma) = 0.88$$

$$\gamma = 1.175$$

$$\gamma = \frac{\mu - \sigma}{\sigma}$$

$$\frac{74 - \mu}{7} = \frac{1.175}{1}$$

$$\mu - 74 = 7 \times 1.175 = 8.225$$

$$\mu = 74 + 8.225 = 82.225$$

الخطوات التي اتبعت للحصول على النتيجة اعلاه:

- نرسم المنحنى لتوضيح المساحة التي يقع ضمنها من سيحصلون على تقدير أ ومن

الذين لن يحصلوا على هذا التقدير  $1 - 0.12 = 0.88$

- نبحت من خلال الجدول التوزيع الطبيعي المعياري عن القيمة المعيارية المقابلة للمساحة 0.88 فنجد انها تتوسط المساحتين

$$0.8800$$

$$0.8790 \quad 0.8810$$

$$1.17 \quad 1.18 = Y$$

القيمة التي تقابل 0.88 هي:

$$1.175 = \frac{1.17 + 1.18}{2}$$

مثال (5-12) : في تقييم نتائج الامتحان لاحد المساقات لعدد من الطلبة بلغ 120 طالبا وجد ان متوسط العلامات 64 والانحراف المعياري 8 فاذا اختير طالب عشوائيا

- (1) ما هو احتمال ان تكون درجته اكبر من 70.
- (2) ما هو احتمال ان تكون درجته بين (55، 80).
- (3) ما هو احتمال ان يكون قد حصل على درجة اقل من 80.
- (4) ما هو احتمال ان يكون قد حصل على درجة على الأكثر 75.
- (5) اذا حدد ما نسبته 8٪ لمنحهم تقدير ممتاز ماهي ادنى درجة تؤهل الطالب للحصول على هذا التقدير.
- (6) ماهو عدد الطلبة المتوقع لأولئك الحاصلين على علامات اقل من 54.

الحل:  $\mu = 64, \sigma = 8$

$$\begin{aligned} (1) \quad P(X < 70) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{70 - 64}{8}\right) = P\left(Z < \frac{6}{8}\right) = P(Z < 0.75) = 0.7734 \\ &= 0.7734 - 1 = -0.2266 \\ &= P\left(\frac{64 - 80}{8} < Z < \frac{64 - 55}{8}\right) = P\left(-2 < Z < -1.125\right) \end{aligned}$$

$$C(1.125 > Y > 2) =$$

$$0.8480 = 0.1292 - 0.9772 = (1.135 -) \emptyset - (2) \emptyset$$

$$0.9772 = (2) \emptyset = (2 > Y) C = \left( \frac{64 - 80}{8} > Y \right) C = (80 > S) C \quad (3)$$

$$(1.38) \emptyset = 0.9192 = (1.38) \emptyset = (1.38 > Y) C = \left( \frac{64 - 75}{8} > Y \right) C = (75 > S) C \quad (4)$$

$$75.24 = 64 + 11.24 = S_r \Leftarrow 11.24 = 64 - S \quad (5)$$

$$0.0968 = (1.3 -) \emptyset = (1.3 - > Y) C = \left( \frac{64 - 54}{8} > Y \right) C = (54 > S) C \quad (6)$$

عدد الطلاب المتوقع  $12 \times 11.616 = 120 \times 0.0968$  طالباً.

مثال (5-13): اذا علم ان معدلات الكفاءة في احدى الكليات التي عدد طلابها

300 طالب تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 2.1 وانحراف معياري 1.2 كم من

هؤلاء الطلبة يتوقع ان تكون علاماته تتراوح بين 2.5-3.5 اذا علم ان

التقريب هو لاقرب خانة عشرية.

الحل:  $n = 300$ ،  $\mu = 2.1$ ،  $\sigma = 1.2$

$$C\left(\frac{2.1 - 2.5}{1.2} > Y > \frac{2.1 - 3.5}{1.2}\right) C = \left(\frac{2.1 - 3.5}{1.2} > Y > \frac{2.1 - 2.5}{1.2}\right) C$$

$$= C(0.33 > Y > 1.17) =$$

$$= (0.33) \emptyset - (1.17) \emptyset =$$

$$0.247 =$$

$$\text{عدد الطلاب} = 0.2497 \times 300 = 75 \text{ طالباً}$$

## أسئلة عامة على المنحنى الطبيعي

س1 اعطيت احدى الشعب امتحانا في الاحصاء من عشر علامات، وكانت النتائج تدرج من الصفر حتى (10) وكان متوسط علامات الطلاب في هذا الامتحان 6.5 والانحراف المعياري 1.5 فاذا افترضنا ان العلامات تتوزع توزيعا طبيعيا فأوجد ما يلي:-

- (1) حدد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين حصلوا على (7) علامات.
- (2) اكبر علامة سجلها ال 20% من الطلاب ذوي العلامات المتدنية في الفصل.
- (3) اصغر علامة سجلها ال 20% من الطلاب ذوي العلامات المرتفعة في الفصل.

س2 اخذت عينة مكونة من 200 انبوب من احدى مصانع الانابيب وكان متوسط قطر الانبوب 10 سم والانحراف المعياري 0.5 سم وكان استخدام هذا الانبوب يسمح بانحراف في القطر يتراوح اقصاه من 9.5 - 10.5 سم وفيما غير ذلك تعتبر الانابيب تالفة. اوجد النسبة المئوية للانابيب التالفة الناتجة في هذا المصنع على افتراض ان اقطار الانابيب تتوزع توزيعا طبيعيا.

س3 متوسط طول 400 شجرة سرو 7م والانحراف المعياري 0.8 م فاذا فرضنا ان الاطوال تتوزع توزيعا طبيعيا فأوجد ما يلي:-

- 1- عدد الاشجار التي اطوالها بين 6-7.5م
- 2- عدد الاشجار التي تزيد اطوالها عن 8م

س4 اذا كان متوسط اعمار البدلات التي تستوردها المؤسسة العسكرية للجنود 36

شهرا والانحراف المعياري 6 شهور وكان عمر البدلات يأخذ شكل التوزيع الطبيعي فاذا استوردت المؤسسة 5000 بدلة فكم بدلة تحتاج الى الاستبدال بعد 30 شهراً.

س5 اذا كانت وزارة التعليم العالي تمنح لاعلى 4٪ من طلبة كليات المجتمع في الفحص الشامل بعثات دراسية وكانت علامات طلاب الكلية قريبة من توزيع طبيعي وسطه الحسابي 65 وانحرافه المعياري 6 فما هي اقل علامة تحصل على بعثة دراسية.

س6 الأزواج التالية هي قيم معيارية تحصر بينها جزءاً من مساحة المنحنى المطلوب إيجاد المساحة الواقعة خارج كل زوجين.

أ- (-1.8، 1.8) ب- (-1.6، 1.6) ج- (-2.28، 2.28)

س7 جد المساحة المحصورة بين كل زوج من القيم المعيارية التالية:-

أ- (-0.4، 0.4) ب- (-0.6، 0.6) ج- (-1.2، 1.2)

س8 جد المساحة الموجودة الى يمين كل من القيم المعيارية التالية :

أ) -1.3 ب) -1 ج) 1.2 د) -0.8

س9 جد المساحة الموجودة الى يسار كل من القيم المعيارية التالية :

أ) 1.5 ب) 0.8 ج) صفر د) -0.5

## الوحدة السادسة

### نظرية الاحتمالات

#### مقدمة:

تبحث نظرية الاحتمالات في الحوادث التي نتائجها غير مؤكدة بل عشوائية وهنا نعطي التعريف التالي.

**تعريف:** العشوائية هي التجربة التي نتائجها ترتبط بالصدفة وكذلك غير مؤكدة النتائج.

ومن المفيد ايضا وحتى نستطيع فهم نظرية الاحتمالات بشكلها الجيد لابد من تقديم التعريفات التالية والتركيز على مزيد من الامثلة.

#### 6-1 : الفضاء العيني :

**تعريف :** الفضاء العيني لتجربة ما هو مجموعة جميع النتائج المتوقعة من هذه التجربة وسنرمز لها بالرمز  $\Omega$ .

**تعريف:** الحدث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني وسنرمز له بأي حرف من الحروف الایمجدية.

وهناك عدة انواع من الاحداث نقدم تعريفاتها.

**تعريف:** الحدث البسيط هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على عنصر واحد من عناصر الفضاء العيني.

**تعريف:** الحدث المركب هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على اكثر من عنصر من عناصر الفضاء العيني.

**تعريف:** الحدث المؤكد هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على جميع عناصر الفضاء العيني.

**تعريف:** الحدث المستحيل هو الحدث الذي يستحيل وقوعه ومجموعته لا تحتوي على عناصر من عناصر الفضاء العيني.

بعد تناولنا هذه التعريفات نورد الامثلة التالية.

**مثال (6-1) :** في تجربة القاء حجر نرد مرة واحد

(1) اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.

(2) الحدث أ الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع الحدث.

(3) الحدث ب الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع هذا الحدث

(4) الحدث ج الذي يمثل ظهور العدد على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

(5) الحدث د الذي يمثل ظهور عدد اقل من او يساوي 6 على الوجه العلوي واذكر نوعه.

(6) الحدث هـ الذي يمثل ظهور العدد 7 على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

**الحل: (1) الفضاء العيني للتجربة  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$**

(2) الحدث أ =  $\{6, 4, 2\}$  وهذا حدث مركب لاحتواء مجموعته على اكثر من عنصر.

(3) الحدث ب =  $\{5, 3, 2\}$  وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

(4) الحدث ج =  $\{1\}$  وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

(5) الحدث د =  $\{6, 5, 4, 3, 2, 1\}$  وهذا حدث مؤكد لاحتواء مجموعته على عناصر الفضاء العيني.

(6) الحدث هـ =  $\{\emptyset\}$  وهذا حدث مستحيل لعدم احتواء مجموعته على عناصر

**مثال (6-2) :** في تجربة القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين اكتب مايلي.

(1) الفضاء العيني لهذه التجربة.

(2) الحدث الذي يمثل ظهور وجهين متشابهين على الوجهين الظاهرين.

(3) الحدث الذي يمثل ظهور كتابة واحدة على احد الوجهين الظاهرين.

(4) الحدث الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الاقل

(5) الحدث الذي يمثل ظهور صورتين على الاكثر.



الحل: (1)  $\Omega = \{ص ص، ص ك، ك ص، ك ك\}$  حيث ص يمثل ظهور صورة ، ك يمثل ظهور كتابة.

(2)  $A = \{ص ص، ك ك\}$  يعني ظهور صورتين او كتابتين.

(3)  $B = \{ص ك، ك ص\}$

(4)  $C = \{ص ص، ك ص، ص ك\}$

(5)  $D = \{ك ك، ك ص، ص ك، ص ص\} = \Omega$

مثال (3-6) : صندوق به 8 مصاييح خمسة منها سليم سحب مصباحان على التوالي دون ارجاع اوجد ما يلي

(1) عدد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة.

(2) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل ظهور اثنتين سليمتين.

(3) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل ظهور اثنتين تالفتين.

(4) عدد عناصر الحدث ج الذي يمثل ظهور احدهما سليم والاخرى تالفة.

الحل:

(1) عدد عناصر الفضاء العيني  $= \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{1 \times 2 \times 6!} = 28$  حيث ان عدد

المصاييح = 8 ويراد اختيار اثنتين منها.

(2) عدد عناصر الحدث أ  $= \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$  حيث ان عدد المصاييح السليمة هو 5

ويراد اختيار اثنتين منها.

(3) عدد عناصر الحدث ب  $= \binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} = 3$  حيث ان عدد المصاييح التالفة 3 ويراد

اختيار اثنتين منها.

(4) عدد عناصر الحدث ج  $= \binom{3}{1} \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$  حيث ان عدد المصاييح السليمة

خمسة ويراد اختيار احدهما وكذلك المصاييح التالفة ثلاثة ويراد اختيار احدهما.

مثال (6-4): كيس به ثمانية كرات مرقمة من 1 الى 8 اوجد مايلي.

(1) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل سحب ثلاث كرات في آن واحد دون ارجاع.

(2) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل سحب ثلاثة كرات على التتابع دون ارجاع.

(3) عدد عناصر الحدث ج الذي يمثل سحب ثلاثة كرات مع الارجاع.

الحل: (1) عدد عناصر الحدث أ  $= \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$

(2) عدد عناصر الحدث ب  $= 8 \times 7 \times 6 = 336$  حيث ان اختيار المرة الاولى يتم بثمانية طرق مختلفة ولان السحب دون اعادة فليسحب الكرة الثانية يمكن ان يتم بسبعة طرق مختلفة لانه تبقى في الكيس سبعة كرات اما سحب الكرة الثالثة فيتم ذلك بستة طرق وهكذا.

(3) عدد عناصر الحدث ج  $= 8 \times 8 \times 8 = 512$  لان السحب مع الاعداء.

تعريف: نسمي الحدثان أ، ب من الفضاء العيني  $\Omega$  بأنهما حدثان منفصلان اذا كان  $A \cap B = \emptyset$ . أي لا يوجد عناصر مشتركة بين الحدثين.

مثال (6-5): في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة اذا كان الحدث أ يمثل ظهور

عدد زوجي، والحدث ب يمثل ظهور عدد فردي على الوجه العلوي فهل

الحدثان أ، ب حدثان منفصلان؟

الحل: نكتب عناصر الحدث أ  $= \{2, 4, 6\}$ .

عناصر الحدث ب  $= \{1, 3, 5\}$ .

∴  $A \cap B = \emptyset$  فان الحدثان أ، ب منفصلان.

## 6-2-2) نظريات في الاحتمالات

نظرية : اذا كان أ  $\supset \Omega$  فان

$$(1) \quad 1 \leq P(A) \leq 1$$

$$(2) \quad P(\Omega) = 1$$

$$(3) \quad P(\emptyset) = 0.$$

$$(4) \quad C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

$$(5) \quad A \cap B \leftarrow \emptyset \Leftrightarrow C(A \cup B) = C(A) + C(B).$$

$$(6) \quad C(\bar{A} - B) = C(A \cap B) - C(A \cap \bar{B})$$

$$(7) \quad C(B - \bar{A}) = C(A \cap B) - C(\bar{A} \cap B)$$

وهنا بعض الخصائص في الاحتمالات نورد اهمها

(1) اذا كانت الاحداث  $A_1, A_2, A_3, \dots$  كل اثنين فيهما احداثا منفصلة فاذا كان

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

$$C(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = C(A_1) + C(A_2) + C(A_3) + \dots + C(A_n) = C(\Omega) = 1$$

$$(2) \quad \text{اذا كان } A \subset B \Leftrightarrow C(A) \leq C(B).$$

$$(3) \quad C(\bar{A}) = 1 - C(A) \text{ حيث } \bar{A} \text{ هي متمم الحدث } A \text{ بالنسبة لـ } \Omega.$$

مثال (6-6) : اذا كان  $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  والدوال التالية معرفة على  $\Omega$  فأبي من

هذه الدوال هي دالة احتمالية.

$$(1) \quad C(A_1) = \frac{1}{3}, C(A_2) = \frac{1}{4}, C(A_3) = \frac{1}{5}, C(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad C(A_1) = \frac{1}{3}, C(A_2) = \frac{1}{3}, C(A_3) = \frac{1}{3}, C(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$(3) \quad C(A_1) = \frac{1}{4}, C(A_2) = \frac{1}{3}, C(A_3) = \frac{1}{2}, C(A_4) = \frac{1}{4}$$

ملاحظة: حتى تكون الدالة المعطاة دالة احتمالية يجب ان يكون مجموع احتمالات

عناصر الفضاء العيني .

$$\text{الحل: } (1) \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$$

$$(1) \quad C(A_1) + C(A_2) + C(A_3) + C(A_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{10+12+15+20}{60} = \frac{57}{60} \neq 1$$

∴ الدالة ليست دالة احتمالية.

$$(2) \therefore C_2(C_3) = \frac{1-}{3} \text{ ولا يجوز } \therefore \text{ح}_2 \text{ ليس دالة احتمال.}$$

$$(3) 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} = ({}^1_4)C_3C + ({}^3_3)C + ({}^2_2)C + ({}^1_1)C$$

$$\Omega = {}^4_4C \cup {}^3_3C \cup {}^2_2C \cup {}^1_1C, 1 \geq ({}^i_3)C, i \geq 0$$

$\therefore$  فالدالة  $\text{ح}_3$  دالة احتمال.

مثال (6-7): اذا كان  $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  واذا كان ح دالة احتمالية معرفة على  $\Omega$

اوجد قيمة المجهول في كل مما يلي.

$$(1) {}^1_1C = ({}^1_3)C, \frac{1}{3} = ({}^1_2)C, \frac{1}{6} = ({}^1_3)C, \frac{1}{9} = ({}^1_4)C, f = ({}^1_4)C$$

$$(2) {}^1_1C = ({}^1_4)C, \frac{1}{4} = ({}^1_3)C, 2 = ({}^1_3)C, ({}^1_4)C = \text{اوجد } f = ({}^1_3)C, f = ({}^1_4)C$$

الحل: (1)  $1 = ({}^1_4)C + ({}^2_4)C + ({}^3_4)C + ({}^4_4)C$  لان الدالة ح احتمالية.

$$1 = ({}^1_4)C + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$1 = ({}^1_4)C + \frac{11}{18} \Leftrightarrow 1 = ({}^1_4)C + \frac{2+3+6}{18}$$

$$\therefore ({}^1_4)C = \frac{11}{18} - 1 = \frac{7}{18}$$

(2) اذا فرضنا ان  $\text{ح}({}^4_4) = \text{ح}({}^3_4)$  فان  $\text{ح}({}^3_4) = 2$  س وعليه فان

$$1 = ({}^1_4)C + ({}^2_4)C + ({}^3_4)C + ({}^4_4)C$$

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\text{س} + \text{س}$$

$$1 = \frac{2}{4} + 3\text{س}$$

$$3\text{س} = \frac{2}{4} - 1 = -\frac{2}{4}$$

$$\therefore ({}^1_4)C = \frac{1}{6}, ({}^1_3)C = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$$

مثال (6-8): اذا كان لدينا  $P(A) = \frac{1}{2}$ ،  $P(B) = \frac{3}{8}$ ،  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

اوجد ما يلي:

$$(1) P(A \cup B) \quad (2) P(\bar{A}) \quad (3) P(\bar{B}) \quad (4) P(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad (5) P(A \cup \bar{B}) \quad (6) P(A \cap \bar{B})$$

الحل:

$$(1) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(2) \frac{3}{8} = \frac{2-1+4}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{5}{8} = \frac{3}{8} - 1 = P(B) - 1 = P(\bar{B})$$

$$(4) \frac{5}{8} = \frac{3}{8} - 1 = P(A \cup B) - 1 = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$(5) \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - 1 = P(A \cap B) - 1 = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

ملاحظة: القانونان اللذان ساعدتا في حل الجزء 4، 5 هما قانونان ديمورغات في

الاحتمالات وهما:

$$(1) P(A \cup B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$(2) P(\bar{A}) = P(A \cup B)$$

$$(6) \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = P(A \cap B) - P(A) = P(\bar{A} \cap B)$$

$$(7) \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = P(A \cap B) - P(B) = P(A \cap \bar{B})$$

2-3 الاحتمال المنتظم والتكرار النسبي:

تعريف: اذا كان احتمال وقوع كل مفردة من مفردات الفضاء العيني متساو فاننا

نقول بأن الاحتمال منتظم.

فإذا كان أ حدث في  $\Omega$  فإن احتمال أ يمكن إيجاده من العلاقة

$$\text{ح}(أ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{n(أ)}{n(\Omega)} \quad \text{.....(6-1)}$$

مثال (6-9): في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة ان احتمال ظهور كل عنصر من

$$\text{الفضاء العيني ح}(1)=\text{ح}(2)=\text{ح}(3)=\text{ح}(4)=\text{ح}(5)=\text{ح}(6)=\frac{1}{6}.$$

وعليه فإن هذا الاحتمال يسمى بالاحتمال المنتظم أو التكرار النسبي.

مثال (6-10): في تجربة سباق الخيول فإن احتمال نجاح خيل مختلف عن الخيل الآخر

وعليه فإن هذا النوع من الاحتمال يسمى بالاحتمال غير المنتظم.

مثال (6-11): كيس به خمسة كرات حمراء، 4 بيضاء، 3 زرقاء سحب من الكيس

كرة واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

الحل: ليكن أ هو الحدث الذي يمثل ظهوره كرة بيضاء فإن عدد الكرات البيضاء في

الكيس 4 وعدد الكرات جميعها 12.

$$\therefore \text{ح}(أ) = \frac{n(أ)}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال (6-12): صندوق به 12 كرة مرقما من 1 الى 12 سحب من الصندوق كرة

واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة عليها رقم يقبل القسمة على 3.

الحل: ليكن الحدث هو أ وعليه فإن

$$A = \{3, 6, 9, 12\}, \quad n(A) = 4, \quad n(\Omega) = 12 \therefore$$

$$\text{ح}(أ) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال (6-13): صندوق به 5 كرات حمراء، 3 كرات زرقاء، 4 كرات صفراء؟ ما

احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان حمراوان.

(3) سحبت اربعة كرات على التوالي دون ارجاع ما احتمال ان تكون اول كرتان مسحوبتان حمراوان والثالثة صفراء والرابعة زرقاء؟

(4) سحبت ثلاث كرات على التوالي مع الارجاع ما احتمال ان تكون الكرة الاولى حمراء والثانية صفراء والثالثة زرقاء؟

الحل: (1) ليكن الحدث المطلوب أ فان:

$$\frac{5}{33} = \frac{10}{66} = \frac{\frac{4 \times 5}{1 \times 2}}{\frac{11 \times 12}{1 \times 2}} = \frac{\left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)}{\left(\frac{12}{1}\right)\left(\frac{11}{2}\right)} = (أ) ح$$

(2) ليكن الحدث المطلوب ب فان

$$\frac{3}{22} = \frac{30}{220} = \frac{\frac{5}{1} \times \frac{3 \times 4}{1 \times 2}}{\frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3}} = \frac{\left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{3}{3}\right)}{\left(\frac{12}{1}\right)\left(\frac{11}{2}\right)\left(\frac{10}{3}\right)} = (ب) ح$$

(3) ليكن الحدث المطلوب هو جـ فان ح(جـ)

$$\frac{2}{99} = \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{11} \times \frac{5}{12} = ح(جـ)$$

(4) ليكن الحدث المطلوب د فان ح(د)

$$\frac{5}{144} = \frac{3}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{12} = ح(د)$$

لان السحب مع الاعادة وعليه يبقى عدد الكرات الكلي=12 وعدد الكرات من كل لون ثابت.

مثال (6-14): صندوق به 15 مصباح خمسة منها تالفة سحبت من الصندوق ثلاث مصابيح معا اوجد الاحتمالات التالية.

(1) احتمال ان الثلاثة مصاييح سليمة.

(2) احد هذه المصاييح الثلاث تالف.

(3) احتمال احدهما على الاقل تالف.

الحل: (1) عندما يكون عدد المصاييح الثلاثة خمسة مصاييح معنى ذلك ان عشرة فيها سليم ويراد سحب 3 مصاييح من بين خمسة عشر مصباح ويتم ذلك بعدد الطرق

$$\text{المختلفة} = \binom{15}{3} = \frac{13 \times 14 \times 15}{1 \times 2 \times 3} = 455 \text{ طريقة}$$

ويراد ان تكون الثلاثة مصاييح المسحوبة سليمة وبما ان عدد المصاييح السليمة 10 لذا

$$\text{يمكن اختيار ثلاثة منها بعدد من الطرق} = \binom{10}{3} = \frac{8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 120 \text{ طريقة مختلفة}$$
$$\text{وعليه فاذا كان الحدث المطلوب هو أ فان ح(أ)} = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$$

(2) ليكن الحدث ب هو الحدث المطلوب فان

$$\text{ح(ب)} = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5}{1} \times \frac{9 \times 10}{1 \times 2}}{\frac{13 \times 14 \times 15}{1 \times 2 \times 3}} = \frac{5 \times 45}{455} = \frac{225}{91}$$

(3) ان احتمال الحصول على الاقل واحدة تالفة هو متمم للحدث الذي يمثل الحصول

على ثلاثة سليمة فاذا كان الحدث يمثل جـ فان

$$\text{ح(ج)} = \text{ح}(\bar{A}) = 1 - \text{ح(أ)}$$

$$= \frac{67}{91} = \frac{24}{91} - 1 =$$

مثال (6-15): اذا كان لدينا عشر بطاقات مرقمة من 1 الى 10 بداخل صندوق خلطت بشكل جيد اوجد ما يلي.



1) اذا سحبت بطاقتان معا من الصندوق ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين على البطاقتين عدد فردي.

2) اذا سحبت بطاقتان على التوالي دون ارجاع البطاقة المسحوبة ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين عددا فرديا.

3) اذا سحبت بطاقتان على التوالي وكان السحب مع الارجاع ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين على البطاقتين عددا فرديا.

الحل: 1) ان سحب بطاقتين من بين عشرة بطاقات يتم بعدد من الطرق المختلفة عددها عدد الطرق  $= \binom{10}{2} = \frac{9 \times 10}{1 \times 2} = 45$ .

اما بالنسبة لسحب بطاقتين بحيث يكون مجموعهما فردي يجب ان تكون البطاقة الاولى اما عدد زوجي والبطاقة الثانية فردية لان المجموع فردي أي عدد زوجي + عدد فردي = عدد فردي وهنا لدينا خمسة اعداد فردية وخمسة اعداد زوجية وهي على النحو التالي:

العدد الفردي	العدد الزوجي
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

ونستطيع تمثيل عدد الطرق المختلفة لسحب هذه البطاقات ليكون المجموع عدد فردي بالشجرة على النحو ومن خلال هذا التمثيل نلاحظ ان عدد الطرق المختلفة  $= 5 \times 5 = 25$  طريقة

(1) فإذا كان الحدث يمثل أ فإن

$$ح(أ) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

(2) إذا كان الحدث المطلوب ب فإن

$$ح(ب) = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

(3) إذا كان الحدث المطلوب هو جـ فإن

$$ح(ج) = \frac{25+25}{100} = \frac{1}{2}$$

لان السحب مع الاعادة فان عدد الطرق المختلفة  $10 \times 10 = 100$

مثال (6-16): صف به 25 طالبا ذكور 15 اناثا راسب 9 طلاب، 6 طالبات في مادة

الرياضيات اختبر احد الطلبة بشكل عشوائي اوجد احتمال ان يكون

الطالب المختار هو من الذكور او راسب في الرياضيات.

الحل: عدد عناصر الفضاء العيني  $\Omega = 25 + 15 + 40 = 80$

وليكن الحدث أ هو الممثل لان يكون الطالب المختار هو من الذكور فان

ن(أ) = 25 وان الحدث ب يمثل ان يكون الطالب المختار راسب في الرياضيات فان

ن(ب) = 9 + 6 + 15 = 30 وان الحدث أ ∩ ب هو ان يكون الطالب المختار هو من الذكور

وراسب في الرياضيات وان ن(أ ∩ ب) = 9 وعليه فان

$$ح(أ) = \frac{25}{80}, ح(ب) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}, ح(أ ∩ ب) = \frac{9}{40} \text{ والمطلوب إيجاد } ح(أ ∪ ب) \text{ لذا}$$

نجد هذا الاحتمال من العلاقة  $ح(أ ∪ ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ ∩ ب)$

$$= \frac{25}{80} + \frac{15}{40} - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}$$

مثال (6-17): في تجربة القاء حجر نرد متمايزين في الهواء اوجد الاحتمالات التالية.

- (1) ظهور عددين متساويين على الوجهين العلويين.
- (2) ظهور المجموع 10 على الوجهين الظاهريين.
- (3) ظهور المجموع 13 على الوجهين الظاهريين.
- (4) ظهور عدد فردي على احد الوجهين الظاهريين فقط.
- (5) ظهور عدد اكبر من 4 على احد الوجهين الظاهريين.
- (6) ظهور مجموع 9 على الاقل على الوجهين الظاهريين.
- (7) ظهور مجموع 6 على الوجهين الظاهريين او عدد زوجي على كلا الوجهين الظاهريين.
- (8) ظهور مجموع فردي على الوجهين الظاهريين.

الحل: ان الفضاء العيني لهذه التجربة  $\Omega = \{(1,1), (2,1), \dots, (6,6)\}$

$$(1) \text{ أ} = \{(1,1), (2,2), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Leftrightarrow \text{ح (أ)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$(2) \text{ ح (ب)} = \{(4,6), (6,4), (5,5)\} \Leftrightarrow \text{ح (ب)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$(3) \text{ ح (ب)} = \emptyset \Leftrightarrow \text{ح (ج)} = \text{صفر}.$$

$$(4) \text{ د} = \{(1,1), (4,1), (6,1), (1,2), (3,2), (5,2), (2,3), (4,3), (6,3), (1,4), (3,4), (5,4), (2,5), (4,5), (6,5), (1,6), (3,6), (5,6)\}.$$

$$\therefore \text{ح (د)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \text{ هـ} = \{(1,5), (5,1), (5,2), (2,5), (5,3), (3,5), (5,4), (4,5), (5,6), (6,5)\},$$

$$\{(1,6), (6,1), (6,2), (2,6), (6,3), (3,6), (6,4), (4,6)\}$$

$$\text{ح (هـ)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$(6) \text{ و} = \{(5,4), (4,5), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6), (4,6), (6,4), (6,3), (3,6)\}.$$

$$\text{ح (و)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$ل = \{(2,6), (6,2), (6,6), (4,4), (2,2), (3,3), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2)\} - \{(6,4), (4,6)\}$$

$$ح(ل) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$ع = \{(2,5), (5,2), (1,6), (6,1), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\} - \{(5,6), (6,5), (3,6), (6,3), (3,4), (4,3)\}$$

$$ح(ع) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

3-6: الاحداث المستقلة:

تعريف: تكون الاحداث مستقلة اذا كان وقوعها بعضها البعض واذا كان أ، ب حدثان فحتى يكونا مستقلين فان.

$$\begin{aligned} (1) \quad & ح(أ \cap ب) = ح(أ) \cdot ح(ب) \\ (2) \quad & ح(أ|ب) = ح(أ), \quad ح(ب|أ) = ح(ب) \end{aligned}$$

.....(2-6)

ملاحظة: يجب التفريق بين الاحداث المستقلة والاحداث المنفصلة حيث ان الاحداث المستقلة تقاطعها ليس  $\emptyset$  بينما الاحداث المنفصلة فان تقاطعها تساوي  $\emptyset$ .

مثال(6-18): في تجربة القاء قطعتي نقود متميزتين اذا كان الحدث أ يمثل ظهور الصورة على القطعة الاولى والحدث ب يمثل ظهور صورة على الثانية فهل الحدثان أ، ب مستقلين؟

الحل: نكتب أولاً المجموعات على صيغة عناصر  
 $A = \{ص ك, ص ص\}, B = \{ك ص, ص ص\}$ . وعليه فان

$$A \cap B = \{ص ص\}, \quad ح(أ) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad ح(أ \cap ب) = \frac{1}{4}$$

$$ح(ب) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore ح(أ) \times ح(ب) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = ح(أ \cap ب) \therefore \text{الحدثان أ، ب مستقلين}$$

$$\text{نتيجة: } C = (C \cap \bar{A}) - (C \cap \bar{B}) \times (C \cap \bar{A})$$

نظرية: اذا كان  $A_1, A_2$  حدثان من  $\Omega$  فان

$$(1) \quad C(A_1 \cup A_2) - 1 = (C(A_1 \cap A_2)) = C(A_1 \cap A_2)$$

$$(2) \quad C(A_1 \cap A_2) - 1 = (C(A_1 \cup A_2)) = C(A_1 \cup A_2)$$

وهذان القانونان يفيدان في حل كثير من المسائل في الاحتمالات.

### نظرية بيز:

نص النظرية: اذا كان  $A_1, A_2, \dots, A_n$  أحداث في  $\Omega$  بحيث ان

$$\emptyset = A_1 \cap \dots \cap A_n$$

$$\emptyset = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

كما هو موضح بالشكل وبرز حدث يشترك في جميع الاحداث الجزئية مثل ي فان احتمال حصول الحدث ي بمعلومية وقوع الحدث أ يكون على النحو التالي.

$$(3-6) \dots\dots\dots \frac{C(A_1/Y) \cdot C(Y)}{C(A_1/Y) \cdot C(Y) + \dots + C(A_n/Y) \cdot C(Y)}$$

مثال (6-19): في مصنع للمسامير الآلة رقم 1 30٪ من المسامير والآلة رقم 2 40٪ والآلة رقم 3 30٪ ونسب التالف هي ان الآلة رقم 1 و 2 للآلة رقم 4 والآلة رقم 3 واخذت مما انتجه المصنع ووجد انه تالف ما احتمال انه يصنع بواسطة الآلة رقم 3.

الحل: نضع ملخصاً للبيانات المعطاة:

$$C(A_1/Y) = 0.30 \quad C(A_1/B) = 0.1$$

$$C(A_2/Y) = 0.40 \quad C(A_2/B) = 0.2$$

$$C(A_3/Y) = 0.30 \quad C(A_3/B) = 0.4$$

$$\begin{aligned} & \frac{(3^1/3) \times (3^1/3)}{(3^1/3) \times (3^1/3) + (2^1/2) \times (2^1/2) + (1^1/1) \times (1^1/1)} = (3^1/3) \times \\ & \frac{0.04 \times 0.3}{0.04 \times 0.30 + 0.02 \times 0.40 \times 0.01 \times 0.30} = \\ & \frac{0.012}{0.02 + 0.008 + 0.003} = \\ & 0.52 = \frac{0.012}{0.023} = \\ & 0.48 = 0.52 - 1 \quad \text{ح(ب/ا)} \end{aligned}$$

مثال(6-20): ينتج احد معامل الاحذية ما نسبته 60% والآخر 40% من الانتاج الكلي فاذا علم ان نسبة السليم من الانتاج الاولي = 90% والثاني 80% .

- (1) المطلوب ايجاد احتمال سحب وحدة انتاج عشوائية خالية من العيوب.
- (2) اذا سحبت وحدة انتاج عشوائية وتبين انها خالية من العيوب ما احتمال ان تكون من المعمل الاول.

$$\text{ح(I)} = 0.60, \text{ح(II)} = 0.40$$

$$\text{ح(I/س)} = 0.90, \text{ح(II/س)} = 0.80$$

$$1) \text{ح(س)} = \text{ح(I)} \times \text{ح(I/س)} + \text{ح(II)} \times \text{ح(II/س)}$$

$$= 0.86 = 0.32 + 0.54 = 0.80 \times 0.40 + 0.90 \times 0.60 =$$

$$2) \text{ح(I/II)} = \frac{0.54}{0.86} = \frac{0.90 \times 0.60}{0.86} = \frac{\text{ح(I)} \times \text{ح(I/س)}}{\text{ح(س)}}$$

(4-6) الاحتمال الشرطي .

تعريف : ان احتمال حدث معين شرط وقوع حدث آخر ويرمز له بالرمز

$$\text{ح(ا/ب)} = \frac{\text{ح(ا \cap ب)}}{\text{ح(ب)}} \quad \text{ح(ا \cap ب)} = \text{ح(ا/ب)} \times \text{ح(ب)}$$

.....(4-6)

$$\text{ح(ب/ا)} = \frac{\text{ح(ا \cap ب)}}{\text{ح(ا)}} \quad \text{ح(ا \cap ب)} = \text{ح(ب/ا)} \times \text{ح(ا)}$$

وكذلك يمكن استنتاج ان الاحداث المتتامة.

$$\frac{(\overline{a|b})x-1}{(b)x-1} = \frac{(\overline{a|b})x}{(b)x-1} = \frac{(\overline{a|b})x}{(b)x} = (\overline{a|b})x$$

$$\frac{(\overline{a|b})x-1}{(b)x-1} = \frac{(\overline{a|b})x}{(b)x-1} = \frac{(\overline{a|b})x}{(b)x} = (\overline{a|b})x$$

مثال (6-21): اذا كان  $x = \frac{1}{3}$ ،  $x = \frac{1}{4}$ ،  $x = \frac{1}{2}$  والمطلوب إيجاد ما يلي:

$$(1) x(a|b) \quad (2) x(b|a) \quad (3) x(\overline{a|b}) \quad (4) x(\overline{b|a}) \quad (5) x(\overline{a|b})$$

الحل: (1) من العلاقة

$$x(a|b) = x(a|b) + x(b|b) - x(a|b)$$

$$x(a|b) = x(a|b) + x(b|b) - x(a|b)$$

$$\frac{1}{12} = \frac{6-3+4}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = x(b|a) \therefore$$

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{4} = \frac{(a|b)x}{(b)x} = x(a|b) \therefore$$

$$\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{4}-1} = \frac{(\overline{a|b})x-1}{(b)x-1} = \frac{(\overline{a|b})x}{(b)x} = (\overline{a|b})x \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} =$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{(\overline{a|b})^c-1}{(1)^{c-1}} = \frac{(\overline{a|b})^c}{(1)^c} = (\overline{a|b})^c \quad (4)$$

$$5) \text{ ح } (a|b) = \overline{c} - (a|b) = \overline{c} - \frac{1-4}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} = \frac{3}{12} = \frac{1-4}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}$$

نظرية: إذا كان  $a \cap b = \emptyset$  فإن  $\text{ح}(a|b) = \text{صفر}$  وعليه فإن  $\text{ح}(a|b) = \text{صفر}$ ،  
 $\text{ح}(b|a) = \text{صفر}$ .

5-6: المتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد :

### المقدمة

سنتناول في هذا لفصل المتغيرات العشوائية ودوالها الاحتمالية ذات البعد الواحد  
 وسنبدا بإعطاء التعريف التالي :

#### 5-6-1 تعريف المتغير العشوائي

تعريف : يقال للدالة التي تربط كل عنصر من عناصر الفضاء العيني بعدد حقيقي  
 بالمتغير العشوائي ويمكن لهذا المتغير أن يقاس.

وهنا لابد من معرفة القيم الحقيقية التي سيأخذها المتغير العشوائي وكذلك احتمالاتها.  
 وحتى يكون التوزيع الذي يمثل قيم المتغير العشوائي واحتمالاتها توزيعاً احتمالياً فإنه  
 يتوجب أن يكون

$$\sum_{i=1}^n \text{ح}(s_i) = \text{ح}(s_1) + \text{ح}(s_2) + \dots + \text{ح}(s_n) = 1 \quad (5-6) \dots\dots$$

ولتوضيح هذا المفهوم نورد الأمثلة التالية



مثال (6-22) : في تجربة القاء قطعتي نقود (متمايزتين) معاً إذا كان المتغير العشوائي يمثل عدد مرات ظهور صورة أكتب التوزيع الذي يمثل القيم التي يأخذها المتغير العشوائي واحتمالاتها وبين أن هذا التوزيع هو توزيع احتمالي.

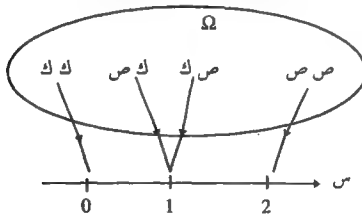
الحل : إن الفضاء العيني لهذا التوزيع هو  $\Omega = \{صص، صك، كص، كك\}$ .  
وعليه فإن قيم  $s$  هي على النحو التالي

$s(كك) = صفر$  لأن عدد الصور الظاهرة هي صفراً.

$s(صص، كص، كك) = 1$  لأن عدد الصور الظاهرة في كلتا الحالتين هي صورة واحدة.

$s(صص، صص) = 2$  لأن عدد الصور الظاهرة هي صورتان.

والآن يمكن توضيح هذا المفهوم بالشكل (1-1) وهو الربط بين عناصر الفضاء العيني والأعداد الحقيقية حتى نصل إلى نص التعريف للمتغير العشوائي.



شكل (1-6) يمثل قيم  $s$  الممكنة

ولحساب احتمال قيم  $s$  نجدها كما يلي.

$$ح(س = صفر) = ح(كك) = \frac{1}{4}$$

$$ح(س = 1) = ح\{كص، صك\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ويمكن تلخيص ما وجد أعلاه في جدول التوزيع (1-6).

س	0	1	2
ح(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

جدول (1-6)

## 6-6 : بعض المقاييس على التوزيعات الاحتمالية

### 1-6-6 : القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي :

إذا كان لدينا المتغير العشوائي س وقيم هذا المتغير  $s_1, s_2, \dots, s_n$  ، وكان احتمال كل قيمة على التوالي ح (س =  $s_1$ )، ح (س =  $s_2$ )، ... ح(س =  $s_n$ ) فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي س والتي سنرمز لها بالرمز ت(س) تعرف على النحو التالي :

$$ت(س) = س_1 \cdot ح(س = s_1) + س_2 \cdot ح(س = s_2) + \dots + س_n \cdot ح(س = s_n) = \mu$$

$$\text{أو} \quad ت(س) = \sum_{i=1}^n س_i \cdot ح(س_i) \quad \dots\dots\dots (6-6)$$

ونسمى ت(س) =  $\mu$  بالتوسط الحسابي للمجتمع.

وإذا كنا نناقش في أكثر من متغير عشوائي فإن القيمة المتوقعة لكل متغير يعبر عنها بالرمز  $\mu$  ولكن يوضع تحتها اسم المتغير العشوائي كما يلي  $\mu_{س_1}, \mu_{س_2}, \dots$

خاصية : إذا كانت ح قيمة عددية ثابتة فإن.

$$ت(ح) = ح.$$

مثال (6-23) : الجدول (6-2) يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

س	-2	-1	1	2	3
ح(س)	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

جدول (6-2)

المطلوب : إيجاد القيمة المتوقعة لهذا التوزيع.

الحل : إن القيمة المتوقعة لهذا التوزيع يمكن إيجادها على النحو

$$ت(س) = -2 \times 0.1 + -1 \times 0.3 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1$$

$$= -0.2 - 0.3 + 0.3 + 0.4 + 0.3 = 0.5$$

مثال (6-24) : إذا كان س متغير عشوائي يأخذ القيم م، 2م، 3م، .... ، م (م-1)،

م<sup>2</sup>. حيث م عدد صحيح، ك عدد ثابت وإذا كان الاحتمال لكل قيمة على النحو.

$$ح(س=س^ك) = \frac{س^{2ك}}{ك}$$

أوجد قيمة الثابت ك بدلالة م علماً بأن توزيع س توزيعاً احتمالياً.

الحل : إن احتمالات المتغير العشوائي هي على التوالي

$$ح(س=م) = \frac{م^2}{ك}$$

$$ح(س=2م) = \frac{4م^2}{ك}$$

⋮

$$ح(س=م^2) = \frac{م^{2م^2}}{ك}$$

ومن خاصية أن التوزيع الاحتمالي تكون مجموع الاحتمالات لقيم المتغير العشوائي

1 فإن

$$\frac{m^2}{k} = \frac{m^2}{k} + \dots + \frac{m^4}{k} + \frac{m^2}{k}$$

بأخذ العامل المشترك

$$\frac{m(1+m)}{2} = m + \dots + 2 + 1 = 1 \text{ ومن العلاقة } 1 = (m + \dots + 2 + 1)$$

$$\frac{m}{k} = \left( \frac{m(1+m)}{2} \right) \Leftrightarrow 1 = k = m^2(1+m).$$

الدالة د = س<sup>2</sup>.

س	0	1	2	3
ح(س)	0.1	0.2	0.3	0.4
د=س <sup>2</sup>	0	1	4	9

جدول (3-6)

$$\text{ت(د)} = \text{ت(س}^2) = 0.1 \times 0 + 0.2 \times 1 + 0.3 \times 4 + 0.4 \times 9$$

$$= 0 + 0.2 + 1.2 + 3.6 = 5$$

نظرية : ليكن س متغير عشوائي ، أ ، ب عدداً ثابتان فإن

$$\text{ت(أس + ب)} = \text{أ ت(س)} + \text{ب.}$$

البرهان : من تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي فإن

$$\text{ت(أس + ب)} = \sum_{i=1}^r (\text{أس}_i + \text{ب.ح(س}_i))$$

$$= (\text{أس}_1 + \text{ب.ح(س}_1)) + (\text{أس}_2 + \text{ب.ح(س}_2)) + \dots + (\text{أس}_r + \text{ب.ح(س}_r))$$

نفك الأقواس

$$= \text{أس}1\text{ح}(س1) + \text{ب ح}(س1) + \text{أس}2\text{ح} - \text{ب ح}(س2) + \dots$$

$$\text{أس}2\text{ح}(س2) + \text{ب ح}(س2)$$

$$= \text{أ} [ \text{أس}1\text{ح}(س1) + \text{أس}2\text{ح}(س2) + \dots + \text{أس}2\text{ح}(س2) + \text{ب ح}(س1) + \text{ب ح}(س2) + \dots + \text{ب ح}(س2) ]$$

$$= \text{أ.ت}(س) + \text{ب}$$

$$\text{لأن ت}(س) = \text{س}1\text{ح}(س1) + \text{أس}2\text{ح}(س2) + \dots + \text{أس}2\text{ح}(س2)$$

$$\text{ح}(س1) + \text{ح}(س2) + \dots + \text{ح}(س2) = 1$$

وهو المطلوب.

$$\text{مثال (6-25): إذا كان ت}(س) = 5 \text{ فأوجد قيمة ت}(4س + 3)$$

$$\text{الحل: ت}(4س + 3) = 4\text{ت}(س) + 3 \quad \text{بتطبيق النظرية أعلاه}$$

$$= 23 = 3 + 5 \times 4$$

نظرية: إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي س هي ت(س) =  $\mu$  فإن

$$\text{ت}(س - \mu) = \text{صفر}.$$

البرهان: بتطبيق النظرية أعلاه وعلى اعتبار أن  $1 = \text{ب} = \mu$  فإن

$$\text{ت}(س - \mu) = \text{ت}(س) - \mu = \mu - \mu = \text{صفر وهو المطلوب}.$$

## 6-6-2: تباین المتغير العشوائي س.

إن تباین المتغير العشوائي س سواء كان منفصلاً أم متصلاً والذي سنرمز له بالرمز

تبا(س) أو  $\sigma^2$  يمكن إيجاداه من العلاقة التالية.

تبا(س) = ت [ (س-μ)<sup>2</sup> ]

والانحراف المعياري والذي سنرمز له بالرمز σ = √تبا(س)

نظرية : إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي μ = ت(س) فإن تباين هذا المتغير العشوائي س

$$\text{تبا(س)} = \text{ت(س)}^2 - \mu^2 = \text{ت(س)}^2 - [\text{ت(س)}]^2$$

### 6-3-6 نظرية ذات الحدين وتوزيع ذات الحدين :

نظرية ذات الحدين : إن هذه عملت على حل مسائل رياضية لها حدين ومرفوعة لقوة نونية يصعب إيجاد مفكوكها كلما ازدادت قيمة القوة ن واستعين بهذه النظرية رياضياً لتأخذ الصورة

$$(أ + ب)^ن = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} . (أ)^{n-r} (ب)^r \text{ حيث } أ \text{ هو الحد الأول.}$$

وقد استعين بهذه النظرية لاستخدامها في توزيع ذات الحدين.

وعليه فإن توزيع ذات الحدين في الأصل كانت نظرية رياضية

\* إذا كانت التجربة تحتل نتيجتين بحيث يمكن تسميتها إما حالة نجاح أو حالة فشل وسنرمز لاحتمال النجاح بالرمز ح واحتمال الفشل 1-ح.

وعند إجراء التجربة وتكرارها ن مرة فاذا رمزنا لعدد النجاحات بالرمز س فإن احتمال الحصول على نجاح معين يمكن إيجاده من العلاقة:

$$C(s) = \binom{n}{s} (C)^s (1-C)^{n-s}$$

حيث  $s = 0, 1, 2, \dots, n$

**خصائص المتغير العشوائي تنطبق عليه توزيع بيرنولي :**

- (1) يمكن تقسيم الأحداث إلى نجاح أو فشل.
  - (2) الأحداث مستقلة أي حدوث الأول لا يؤثر على حدوث الأخرى.
  - (3) إذا كان احتمال النجاح  $(C)$  فإن احتمال الفشل  $(1-C)$
  - (4) الأحداث تتكرر  $(n)$  من المرات.
  - (5) احتمال النجاح ثابت طيلة التجربة.
- \* وان للمتغير العشوائي  $(s)$  الذي يحقق شروط تجربة بيرنولي له التوزيع الاحتمالي

$$C(s) = \binom{n}{s} (C)^s (1-C)^{n-s}$$

$s = 0, 1, 2, \dots, n$ .

وهذا ما نسميه بتوزيع ذات الحدين .

**مثال (6-25) :** أسرة لديها خمسة أطفال فإذا كان المتغير العشوائي  $s$  يمثل عدد الذكور في الأسرة والمطلوب :

(1) هل المتغير العشوائي يحقق شروط تجربة ذات الحدين ثم أوجد الدالة الاحتمالية التي تحكم المتغير العشوائي.

(2) أوجد احتمال أن يكون لدى الأسرة ثلاثة أطفال ذكور.

(3) احتمال أن يكون للعائلة بين طفل ذكر وثلاثة أطفال ذكور.

(4) احتمال أن لا يكون للعائلة أطفال ذكور.

الحل : س = عدد الذكور في الأسرة.

$$\frac{1}{2} = 1 - \text{ح}$$

(1) نعم تحقق الشروط والدالة الاحتمالية التي تحكم س هي :

$$\text{ح}(س) = \binom{5}{س} \left(\frac{1}{2}\right)^س \left(\frac{1}{2}\right)^{5-س} \text{ حيث } س = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ أي } 0 \leq س \leq 5$$

(2) احتمال أن يكون للعائلة ثلاثة أطفال ذكور هو:

$$\text{ح}(س=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{23} = \frac{1}{32} \times 10 =$$

$$(3) \text{ح}(3 \leq س \leq 3) = \text{ح}(3 \geq س \geq 1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} + \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

نجد أولا المعاملات.

$$10 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2} = \binom{5}{2}$$

$$5 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1} = \binom{5}{1}$$

$$10 = \binom{5}{2} = \binom{5}{3} \text{ خاصة}$$

ثم نكتب الاحتمالات المطلوبة.

$$\frac{25}{32} = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} =$$

$$(4) \text{ح}(س=صفر) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = \frac{1}{32} \text{ أي أن احتمال أن لا يكون للعائلة أطفال}$$



ذكور هو  $\frac{1}{32}$  .

مثال (6-26): في تجربة القاء قطعة نقود مرتين أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي الذي يمثل ظهور صورة وكذلك تبينه.  
الحل: المتغير العشوائي س يأخذ القيم التالية:

$$س = 0, 1, 2$$

حيث أن: 0: تمثل عدد المرات لظهور الصورة وهو الصفر

1: تمثل ظهور الصورة مرة واحدة

2: تمثل ظهور الصورة مرتين

وعليه يكون المتغير العشوائي أخذ القيم التالية واحتمالاتها.

س	0	1	2
ح(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

وبتطبيق العلاقة أعلاه فإن:

$$ت(س) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$ت(س)^2 = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{2}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\therefore \text{تبا}(س) = ت(س)^2 - [ت(س)]^2 = \frac{6}{4} - (1)^2 = \frac{6}{4} - \frac{4}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

## تمارين عامة على الاحتمالات

مس1: من الشكل جانباً وبلاستفادة من البيانات التالية:

$$ح(أ_1) - ح(أ_2) - ح(أ_3) - \frac{1}{4}$$

$$ح(أ_4) - ح(أ_5) - ح(أ_6) - \frac{1}{8}$$

$$ح(أ_7) - ح(أ_8) - \frac{1}{16}$$

والمطلوب إيجاد ما يلي:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| (1) ل(أ <sub>1</sub> )                   | (2) ح( $\bar{A}$ )                       | (3) ح(أ <sub>1</sub> )                   |
| (4) ح( A ∩ B )                           | (5) ح( A <sub>1</sub> ∩ A <sub>2</sub> ) | (6) ح( A <sub>1</sub> ∪ A <sub>2</sub> ) |
| (7) ح( A <sub>1</sub> ∪ A <sub>2</sub> ) | (8) ح( $\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1$ )      | (9) ح( $\overline{A_1 \cap A_2}$ )       |
| (10) ح( $\overline{A_1 \cap A_2}$ )      |  |  |

مس2 : على فرض ان ح(أ<sub>1</sub>)=0.3 ح(أ<sub>2</sub>)=0.5 ح( A<sub>1</sub> ∪ A<sub>2</sub> )=0.7 اوجد ما يلي :-

- |  |  |                      |
|--|--|----------------------|
| (1) ح( A <sub>1</sub> ∩ A <sub>2</sub> ) | (2) ح( $\bar{A}_1$ )                     | (3) ح( $\bar{A}_2$ ) |
| (4) ح( $\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1$ )      | (5) ح( $\overline{A_1 \cup A_2}$ )       |                      |
| (6) ح( $\overline{A_1 \cap A_2}$ )       | (7) ح( A <sub>1</sub> ∪ A <sub>2</sub> ) |                      |

مس3 : في تجربة القاء حجر النرد مرة واحدة اذا كانت الاحداث التالية:-

$$A_1 = \{1, 6\}, A_2 = \{1, 3, 5\} \text{ اوجد ما يلي:}$$

- |  |  |                        |
|--|--|------------------------|
| (1) ح( A <sub>1</sub> ∩ A <sub>2</sub> ) | (2) ح( A <sub>1</sub> ∪ A <sub>2</sub> ) | (3) ح(أ <sub>1</sub> ) |
|--|--|------------------------|

$$\begin{array}{lll}
(4) \text{ح}(\bar{2}) & (5) \text{ح}(2/1) & (6) \text{ح}(1/2) \\
(7) \text{ح}(\bar{2}/\bar{1}) & (8) \text{ح}(2/1) & (9) \text{ح}(\bar{2}/\bar{1}) \\
(10) \text{ح}(\bar{2}/\bar{1}) & (11) \text{هل الحدثن مستقلين} & 
\end{array}$$

س4: في تجربة القاء قطعة نقود منتظمة ثم حجر نر منتظم مرة واحدة اوجد الاحتمالات التالية:-

- 1- الحدث الذي يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة النقود.
- 2- الحدث الذي يمثل ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.
- 3- الحدث الذي يمثل عدم ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.
- 4- الحدث الذي يمثل ظهور صورة على الوجه العلوي لقطعة نقود وعدد اقل من 3 على حجر النرد.
- 5- الحدث الذي يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة نقود والعدد 4 او 6 على الوجه العلوي لحجر النرد.

س5: ليكن  $F = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}$  ولتكن احتمالات الاحداث البسيطة

$$\text{معينة كما يلي: } \text{ح}(A_1) = \text{ح}(A_2) = \text{ح}(A_6)$$

$$\text{ح}(A_3) = 2\text{ح}(A_2) = \frac{1}{2}\text{ح}(A_1)$$

$$\text{ح}(A_5) = \frac{1}{2}\text{ح}(A_7) = \frac{1}{2}\text{ح}(A_1)$$

$$\text{اوجد } \text{ح}(A_1), \text{ح}(A_2), \text{ح}(A_3), \text{ح}(A_4), \text{ح}(A_5), \text{ح}(A_6), \text{ح}(A_7)$$

س6: اذا كانت  $A_1, A_2, A_3$  ثلاثة احداث معينة لفضاء عيني وكانت احتمالات

$$\text{الوحدات كما يلي: } \text{ح}(A_1) = 2\text{ح}(A_2), \text{ح}(A_3) = \frac{1}{2}\text{ح}(A_1) \text{ اوجد}$$

$$C(A_1), C(A_2), C(A_3), L(C_1 \cap C_2), L(A_1 \cup A_3)$$

س 7: سحبت كرة عشوائيا من صندوق به 3 كرات بيضاء، 6 كرات حمراء، 8

زرقاء، 9 خضراء اوجد الاحتمالات التالية:-

- 1- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.
- 2- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء.
- 3- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة زرقاء.
- 4- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة حمراء.
- 5- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما حمراء او خضراء.
- 6- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما بيضاء او خضراء.
- 7- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة ليست خضراء او ليست بيضاء.

س 8: كيس به ثلاث كرات بيضاء، 2 صفراء، 4 حمراء، 5 زرقاء، سحبت منه

كرتان عشوائيا احسب الاحتمالات التالية:-

- 1- كلا الكرتان زرقاوان
- 2- واحدة بالضبط زرقاء
- 3- على الاقل واحدة زرقاء.

س 9: اذا كان  $A_1$ ،  $A_2$  حدثان معينان وكان  $C(A_1 \cup A_2) = \frac{5}{8}$

$C(A_1) = \frac{1}{2}$ ،  $C(A_2 \cap A_1) = \frac{1}{3}$  احسب الاحتمالات التالية:

- (1)  $C(\bar{A}_2)$ ،  $C(A_2 \cap A_1)$
- (2)  $C(A_2)$
- (3)  $C(\bar{A}_2)$
- (4)  $C(A_1 \cup A_2)$
- (5)  $C(\overline{A_1 \cup A_2})$
- (6)  $C(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$

## الوحدة السابعة

### الارتباط والانحدار

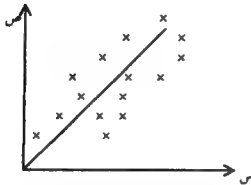
#### (1-7) طريقة جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط

حتى نستطيع ان نعرف على مفهوم الارتباط من خلال جداول الانتشار لا بد من التعرف اولا على كيفية تكون جدول الانتشار ويتم من خلال الخطوات التالية.

- نرسم احدائين الافقي والرأسي حيث يمثل على المحور الافقي الظاهرة س وعلى المحور الرأسي الظاهرة ص.

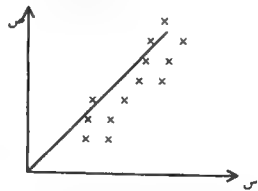
- نعين النقاط التي يمثل فيها الاحداثي السيني قيمة من قيم المتغير س والاحداثي الصادي قيمة من قيم المتغير ص.

- نحاول تحرير منحنى من اغلب النقاط بحيث يتوسط القيم ونلاحظ بعد توزيع النقاط الاشكال الانتشارية التالية:



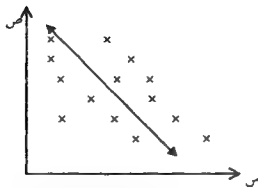
شكل (2-7)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة خطية طردية (موجبة) ولكنها ضعيفة



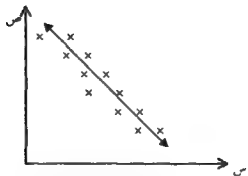
شكل (1-7)

نلاحظ تكثف المشاهدات حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة خطية والارتباط ايجابي (طردى) قوي



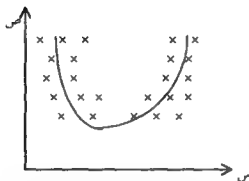
شكل (4-7)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة عكسية (سالبة) والعلاقة ضعيفة



شكل (3-7)

نلاحظ تكثف النقاط حول الخط المستقيم مما يشير إلى أن العلاقة عكسية (سالبة) والعلاقة قوية



شكل (6-7)

أما إذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه فافنا نقول أن العلاقة ليست خطية وإنما من الدرجة الثانية



شكل (5-7)

أما إذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه نقول أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين س، ص

ومن خلال الأشكال سالفة الذكر نلاحظ أننا عبرنا عن العلاقة بين المتغيرين ونوعها وأنها استطعنا أن نعبر عن القوة أو الضعف للعلاقة من خلال جداول الانتشار.

## 2-7 معامل الارتباط وخصائصه

كما اسلفنا بأنه يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرين بمقياس هو معامل الارتباط والذي سنرمز له بالرمز (ر) ويأخذ قيمة عددية تتراوح بين  $-1 \leq r \leq 1$  وإذا وجد قيمة أكبر أو أصغر من هذه الحدود دلالة على أن هناك خطأ حسابي قد حصل،

- وللمعامل دلالات نوردتها في ما يلي لتفسير العلاقة بين المتغيرين.
- (1) اذا كانت  $r = -1$  فان العلاقة بين المتغيرين تكون عكسية تامة.
  - (2) اذا كانت  $-1 < r < 0$  فان العلاقة تكون علاقة عكسية.
  - (3) اذا كانت  $r = 0$  صفر. فهذا يعني انه لا وجود لأي علاقة بين المتغيرين س، ص.
  - (4) اذا كانت  $0 < r < 1$  فهذا يعني انه يوجد علاقة ايجابية تقوى كلما اقتربنا من الواحد صحيح.
  - (5) عندما تكون  $r = 1$  فان العلاقة تكون علاقة تامة ايجابية.

## 7-2 (1) معامل ارتباط بيرسون

لايجاد معامل الارتباط باستخدام طريقة بيرسون نتبع الخطوات التالية:

- نجد  $\sum s$ ،  $\sum ص$

- نجد  $\sum s^2$  أي مربع كل مشاهدة من س ثم المجموع.

- نجد  $\sum ص^2$  أي مربع كل مشاهدة في ص

- نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n s_i \times \sum_{i=1}^n ص_i - \frac{\sum_{i=1}^n s_i \times \sum_{i=1}^n ص_i}{n}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n s_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n s_i \right)^2}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n ص_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n ص_i \right)^2}{n} \right)}}$$

(1-7).....

مثال (1-7): اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية للمتغيرين س، ص كما في الجدول (1-7)

المجموع						
س	1	2	3	4	5	15
ص	3	6	9	12	15	45

جدول (1-7)

المطلوب: ايجاد معامل الارتباط باستخدام معامل ارتباط بيرسون.

الحل: نشكل جدول الحل (2-7) والذي يحوي جميع الحسابات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	س ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
1	1	3	3	1	9
2	2	6	12	4	36
3	3	9	27	9	81
4	4	12	48	16	144
5	5	15	75	25	225
المجموع	15	45	165	55	495

جدول (2-7)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر

$$r = \frac{135 - 165}{\sqrt{(405 - 495)(45 - 55)}} = \frac{\frac{45 \times 15}{5} - 165}{\sqrt{\left(\frac{45 \times 45}{5} - 495\right)\left(\frac{15 \times 15}{5} - 55\right)}} = \frac{30}{30} = \frac{30}{30} = \frac{30}{\sqrt{900} \sqrt{90 \times 10}} = 1$$

ر=1 أي ان الارتباط ارتباط ايجابي تام



مثال (7-2) : البيانات التالية تمثل قيم س، ص مرتبة في الجدول (6-3)

المجموع						
س	3	7	4	5	7	26
ص	2	6	8	6	8	30

جدول (7-3)

المطلوب إيجاد معامل الارتباط لهذه البيانات

الحل: نكون الجدول (6-4) والمحتوي على البيانات المطلوبة لحل السؤال

الرقم	س	ص	س ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
1	3	2	6	9	4
2	7	6	42	49	36
3	4	8	32	16	64
4	5	6	30	25	36
5	7	8	56	49	64
المجموع	26	30	166	148	204

جدول (7-4)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر من العلاقة

$$r = \frac{\frac{30 \times 26}{5} - 166}{\sqrt{\left(\frac{30 \times 30}{5} - 204\right)\left(\frac{26 \times 26}{5} - 148\right)}} = \frac{156 - 166}{\sqrt{(180 - 204)(135.2 - 148)}} = \frac{-10}{\sqrt{307.2}} = \frac{-10}{17.53} = -0.57$$

أي ان الارتباط بين المتغيرين س، ص ايجابي (طردي) متوسط

مثال (3-7): البيانات التالية تمثل قيم المتغيرين س ، ص كما في الجدول (5-7) .

المجموع						
س	4	7	9	12	15	47
ص	11	9	5	4	2	31

جدول (5-7)

المطلوب إيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص

الحل: نشكل الجدول (6-7) والمحتوي على جميع البيانات المطلوبة للحل

الرقم	س	ص	س ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
1	4	11	44	16	121
2	7	9	63	49	81
3	9	5	45	81	25
4	12	4	48	144	16
5	15	2	30	225	4
المجموع	47	31	230	515	247

جدول (6-7)

من البيانات اعلاه نطبق العلاقة

$$r = \frac{\frac{31 \times 47}{5} - 230}{\sqrt{\frac{(192.2 - 247)(441.8 - 515)}{5}}} = \frac{61.4 - 230}{\sqrt{\frac{(192.2 - 247)(441.8 - 515)}{5}}} = \frac{61.4 - 230}{\sqrt{\frac{4011.36}{5}}} = \frac{61.4 - 230}{\sqrt{802.272}} = \frac{61.4 - 230}{28.324} = 0.97$$

وهذا ارتباط سلبي قوي

## 7-2-2) إيجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري

لإيجاد معامل الارتباط بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية :

- نجد  $\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$

- نجد  $\sum (س - \bar{س})^2$  ثم  $\sqrt{\sum (س - \bar{س})^2}$  او قد تكون في بعض الاسئلة معطاة

- نجد معامل الارتباط من العلاقة التالية.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (ص_i - \bar{ص})^2}} \quad (2-7)$$

مثال (7-4): من البيانات المعطاة ادناه اوجد معامل الارتباط اذا كان:

$$\sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})(ص_i - \bar{ص}) = 47, \quad \sum_{i=1}^n (س_i - \bar{س})^2 = 16, \quad \sum_{i=1}^n (ص_i - \bar{ص})^2 = 5 \text{ حيث } n=5.$$

$$\text{الحل: نطبق العلاقة } r = \frac{47}{\sqrt{16} \cdot \sqrt{5}} = \frac{47}{4 \cdot 2.236} = \frac{47}{8.944} = 5.25$$

∴  $r = 0.12$  وهذا ارتباط ايجابي ضعيف.

## 7-2-3) معامل ارتباط سبيرمان للترتيب:

كثيرا ما يستعمل هذا المعامل في البيانات الوصفية التي يستحيل عندها استخدام البيانات العددية بطريقة بيرسون وكذلك ايضا يستخدم في البيانات الرقمية لتسهيل العمليات الحسابية. لذا نلجأ لتحويل البيانات الوصفية الى عددية قابلة للحل.

ولاستخدام هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية.

- نجد تراتيب البيانات المعطاة سواء كانت وصفية او رقمية لكل من المتغيرين س، ص ونرمز لهما بالرموز  $س'$  ،  $ص'$  .

- نجد  $ف = س' - ص'$  . أي نجد الفرق بين التراتيب المناظرة.

- نأخذ مربع ف ونطبق العلاقة :

(3-7).....

$$r = \frac{\sum f^2}{n(1-2)} - 1$$

مثال (5-7) : البيانات التالية تعطي تقادير عشرة موظفين في احدى الشركات وكانت مرتبة كما في الجدول (7-7)

س(الأول)	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد	ممتاز	ممتاز	ضعيف	مقبول	جيد جدا
ص(الثاني)	مقبول	ممتاز	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	جيد جدا	جيد	جيد	مقبول	جيد

جدول (7-7)

الحل: نشكل الجدول (8-7) يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	س	ص	ف=س-ص	ف <sup>2</sup>
1	جيد	مقبول	6.5	8.5	-2	4.00
2	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
3	مقبول	ضعيف	8.5	10	1.5	2.25
4	جيد جداً	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
5	جيد	جيد جدا	6.5	3.5	3	9.00
6	ممتاز	جيد جدا	1.5	3.5	-2	4.00
7	ممتاز	جيد	1.5	6	-4.5	20.25
8	ضعيف	مقبول	10	8.5	1.5	2.25
9	مقبول	جيد	8.5	6	1.5	2.25
10	جيد جدا	جيد	4	6	-2	4.00
المجموع						60.50

جدول (8-7)

- ترتيب التقادير اعلاه كما ورد في س، ص

- نجد  $F = S - \bar{S}$

- نجد مربع الفروق والمجموع أي  $\sum_{i=1}^n F_i^2$

- ثم نطبق العلاقة

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n F_i^2}{n(n-1)} - 1 = \frac{60.5 \times 6}{(1-100)10} - 1 = 0.37$$

$$0.63 = 0.37 - 1 = \frac{363}{990} - 1 =$$

وهذا يدل على ان الارتباط جيد

ملاحظات على الحل.

- عندما كان لدينا قيم متكررة كنا نأخذ ترتيب كل قيمة متكررة التصاعدي ثم نجمع هذه الترتيب ونأخذ متوسطها الحسابي فيكون هو ترتيب كل قيمة في  $S$ .  
فمثلاً عند ترتيب قيم  $S$  لاحظنا ان التقدير ممتاز تكرر مرتين كان ترتيبهما التصاعدي 1، 2 فيكون الترتيب لكل تقدير هو  $\frac{2+1}{2} = 1.5$  فيوضع في عمود  $S$  العدد 1.5 امام التقادير ممتاز وهكذا نضع قيم  $S$  و  $S'$  لباقي التقادير.

مثال (7-6): البيانات التالية تمثل درجات 10 طلاب في مبحثي الاحصاء

والرياضيات وهي كما في الجدول (7-9)

87	75	60	90	88	80	95	90	75	85	درجة الاحصاء س
83	70	65	85	72	80	75	75	85	80	درجة الرياضيات س'

جدول (7-9)

اوجد معامل ارتباط سبيرمان

الحل: نكون الجدول (7-10) والذي يحتوي على جميع البيانات المطلوبة

درجة الاحصاء (س)	درجة الرياضيات (ص)	رتبة س-ص	رتبة ص-ص	ف-س-ص	ف <sup>2</sup>
85	80	6	5.5	0.5	0.25
75	85	8.5	2	6.5	42.25
90	85	2.5	2	0.5	0.25
95	75	1	7	6.0-	36.00
80	80	7	5.5	1.5	2.25
88	72	4	8	4-	16.00
0	85	2.5	2	0.5	0.25
60	65	10	10	صفر	صفر
75	70	8.5	9	0.5-	0.25
87	83	5	4	1	1.0
					98.5

جدول (7-10)

بعد ايجاد هذه البيانات نطبق العلاقة التالية

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{n(n-1)} - 1$$

$$0.4 = 0.6 - 1 = \frac{591}{990} - 1 = \frac{985 \times 6}{(1-100)10} - 1 =$$

∴ الارتباط بين المتغيرين س، ص ضعيف وهذه الطريقة تسمى طريقة سبيرمان للترتيب.

## الانحدار

### 3-7 مفهوم الانحدار:

هو إيجاد معادلة رياضية تعبر عن العلاقة بين المتغيرين س، ص تستعمل للتنبؤ عن قيم سابقة وقيم مستقبلية ل ص. او س حسب المعلوم منهما وتكون هذه المعادلة الرياضية خطية ، وقد تكون بدرجة ثانية أو ثالثة ولكن سنتناول هنا الخطية منها فقط وتكون بصورتين.

أ) اذا كان الانحدار من ص على س فان المعادلة هي

$$\text{ص} = \text{أس} + \text{ب} \quad (4-7) \dots\dots\dots$$

المطلوب هو التعرف على قيم أ، ب لصياغة المعادلة ونسمي أ: معامل الانحدار او ميل خط الانحدار، وهو قيمة تقديرية، ب=هو نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور الرأسي ويمكن إيجاد قيم أ. ب من العلاقتين

$$\begin{aligned} \text{أ} &= \frac{\sum_{i=1}^n \text{ص}_i \cdot \text{س}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \text{ص}_i \cdot \sum_{i=1}^n \text{س}_i}{n}}{\sum_{i=1}^n \text{س}_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n \text{س}_i)^2}{n}} \\ (5-7) \dots\dots\dots \end{aligned}$$

ولايجاد ب نجد ها من العلاقة

$$\text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ} \bar{\text{س}} \quad (6-7) \dots\dots\dots$$

حيث  $\bar{\text{س}}$ ،  $\bar{\text{ص}}$  هما المتوسط الحسابي للظاهرة ص، الظاهرة س.

ب) معادلة انحدار س على ص فاننا نكون المعادلة التالية :

$$\text{س} = \text{أ'ص} + \text{ب'} \quad (7-7) \dots\dots\dots$$

ولاحظ قيم أ، ب من العلاقتين :

(9-7).....

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{\left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2} = \frac{1}{n}$$

(10-7).....

$$\boxed{ب = م - أ' م} \quad \text{ولاحظ}$$

3-7 ولايجاد العلاقة الرياضية بين معاملي الانحدار ومعامل الارتباط فاننا نجد كما يلي:

(10-7).....

$$\boxed{ر = أ' \times أ} \quad \text{أو} \quad \boxed{ر = أ' \times أ}$$

ولتوضيح المفاهيم السابقة نورد الامثلة التالية:

مثال (7-7): البيانات التالية تمثل اجور ونفقات خمسة عمال من عمال شركة ما

مرتبة في الجدول (11-7)

25	20	18	15	20	اجور اسبوعية س
20	15	18	14	15	نفقات اسبوعية ص

جدول (11-7)

والمطلوب ايجاد .

أ) معامل ارتباط بيرسون

ب) معادلة انحدار ص/س أي انحدار ص على س باستخدام القانون العام.

ج) معادلة انحدار س/ص أو ص على ص.

د) معامل الارتباط من معامل انحدار ص على س ، س على ص ثم قارن نتيجة د مع نتيجة أ.

هـ) اوجد نفقات عامل ما اذا كان مرتبة 40 دينار.



الحل: نكون الجدول (12-7) الذي يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل

اجور اسبوعية	نفقات المئوية ص	س ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
20	15	300	400	225
15	14	210	225	196
18	18	324	324	324
20	15	300	400	225
25	20	500	625	400
المجموع	98	1634	1974	1370

جدول (12-6)

أ) نجد معامل ارتباط بيرسون من العلاقة (1-7)

$$\frac{82 \times 98}{5} - 1634$$

$$\sqrt{\left(\frac{82 \times 82}{5} - 1370\right)\left(\frac{98 \times 98}{5} - 1974\right)}$$

$$1607.2 - 1634$$

$$\sqrt{(1344.8 - 1370)(1920.8 - 1974)}$$

$$\frac{26.8}{36.61} = \frac{26.8}{1340.64} = \frac{26.8}{25.2 \times 53.2}$$

= 0.73 وهذا معامل ارتباط قوي نوعاما.

ب) لايجاد معادلة الانحدار ص على س نجد

$$\frac{\frac{98 \times 98}{5} - 1634}{\frac{98 \times 98}{5} - 1974} = 1$$

$$0.5 = \bar{A} \Leftrightarrow 0.5 = \frac{26.8}{53.2} = \frac{1607 - 1634}{1920.8 - 1974} =$$

ولايجاد ب نجدها من العلاقة ب = ص - ص لذا نجد أولاً الوسط الحسابي لكل من المتغيرين س ، ص

$$\bar{S} = 19.6 , \bar{V} = 16.4$$

نجد قيمة ب من العلاقة

$$ب = \bar{V} - \bar{A} = 16.4 - 19.6 \times 0.5 = 9.80 - 16.4 = -6.6$$

∴ معادلة انحدار ص/س تصبح على الصورة.

$$ص = 0.5 س + (6.6) \Rightarrow 0.5 س + 6.6$$

ج) ولايجاد معادلة انحدار س على ص نجد أولاً

$$\bar{A} = \frac{26.8}{25.2} = \frac{1607.2 - 1634}{1344.8 - 1370} = \frac{\frac{82 \times 98}{5} - 1634}{\frac{82 \times 82}{5} - 1370} = 1.06$$

∴  $\bar{A} = 1.06$  ثم نجد ب من العلاقة

$$ب = \bar{V} - \bar{A} = 16.4 - 1.06 \times 19.6 =$$

$$= -2.22$$

∴ المعادلة المطلوبة تكون

$$س = 1.06 ص + (2.22) \Leftrightarrow س = 1.06 ص + 2.22$$

د) نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$r^2 = x^2 \bar{A} \text{ واصبح لدينا معلوماً كل من } \bar{A}, \bar{A}^2$$

$$r^2 = 0.5 \times 1.06$$

$$r = \sqrt{0.53} \text{ فيكون معامل الارتباط } r =$$

$$r = 0.73$$

نلاحظ ان الجواب الذي حصلنا عليه بطريقة بيرسون هو نفس الجواب الذي حصلنا عليه بهذه الطريقة.

هـ) نستطيع التنبؤ عن الجواب من العلاقة

$$ص = 0.5س + 6.6 \text{ ونعوض عن س بالقيمة المعطاة}$$

$$ص = 0.5س + 6.6 = 6.6 + 20 = 26.6 \text{ دينار وهو المطلوب}$$

ايجاد معادلة انحدار ص على س باستخدام المربعات الصغرى

الصورة العامة لمعادلة انحدار ص على س  $ص = م س + ح$

$$\sum ص = م \sum س + n ح \text{ بأخذ المجموع لجميع الأطراف}$$

$$82 = 98م + 5 ح \quad (1)$$

س ص = م س<sup>2</sup> + و س نضرب جميع أطراف المعادلة الأصلية في س

$$\sum س ص = م \sum س^2 + \sum و س$$

$$1634 = 1974م + 98 ح$$

$$82 = 98م + 5 ح \quad (2)$$

$$8170 - 9870م + 490 ح$$

$$\pm 8036 = \pm 9604م \pm 490 ح \text{ بالطرح}$$

$$134 = 266م$$

$$0.5 = \frac{134}{266} = م$$

وبالتعويض عن م في أي من المعادلات ولتكن معادلة (1)

$$5 - 0.5 \times 8 = 82$$

$$49 - 82 = 5$$

$$6.6 = \frac{33}{5} = 33 = 5$$

∴ معادلة الانحدار ص على م هي

$$ص = 0.5م + 6.6$$

### أمثلة إضافية

مثال (7-8): الجدول (6-13) يمثل معدل درجات خمسة طلاب في المرحلة الثانوية

ومعدلاتهم في السنة الأولى في الكلية

65	82	64	72	85	معدل الثانوية (س)
67	71	73	81	91	معدل السنة الأولى (ص)

جدول (7-13)

والمطلوب

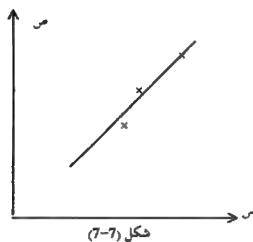
- (1) رسم لوحة الانتشار للمتغيرين س، ص
- (2) إيجاد معامل الارتباط بطريقتين
- (3) أوجد معامل الارتباط من العلاقة التي تربط الارتباط بالانحدار.
- (4) قدر معدل أحد الطلاب في الثانوية العامة إذا كان معدله في السنة الأولى 88.
- (5) قدر معدل طالب في السنة الأولى إذا كان معدله في الثانوية العامة 76.

الحل: نكون جدول الحل (7-14).

	ص <sup>2</sup>	ص	ص رتبة ص	ص رتبة ص	ص <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>	ص ص	ص	ص
72	0	0	1	1	8281	7225	7735	91	85
$736 = \frac{368}{5} = \text{ص}$	1	1	2	3	6561	5184	5832	81	72
$768 = \frac{384}{5} = \text{ص}$	4	2	3	5	5329	4096	4672	73	64
	4	2-	4	2	5041	6724	5822	71	82
	1	1-	5	4	4489	4225	4355	67	65
	10				34190	27454	28416	383	368

جدول (7-14)

(1) نبدأ برسم لوحة الانتشار



والخط المبين يمر بأغلب النقاط

شكل (7-7)

(2) أ- معامل ارتباط بيرسون نجده من العلاقة التالية

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ص}_i \text{س}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \text{ص}_i \sum_{i=1}^n \text{س}_i}{n}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \text{ص}_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n \text{ص}_i)^2}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n \text{س}_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n \text{س}_i)^2}{n} \right)}}$$



س = أص + بَ وبإيجاد الثوابت أ، بَ نصل الى المعادلة المطلوبة نجد أ من العلاقة التالية

$$0.63 = \frac{227.2}{363.3} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ص_i}{ن}}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{\left( \sum_{j=1}^n \frac{ص_j}{ن} \right)^2}{ن} \right)} = 1$$

نجد من العلاقة بَ = مَ - أَ صَ وبالتعويض عن القيم المعطاة

$$25.3 = 48.3 - 73.6 = 76.6 \times 0.63 - 73.6$$

ونكون المعادلة المطلوبة س = 0.63ص + 25.3

جـ) لإيجاد معامل الارتباط من العلاقة

$$0.621 = \sqrt{0.63 \times 0.62} = \sqrt{أ \times أ} = ر$$

5) لتقدير المعدل في الثانوية العامة نعوض في المعادلة س/ص.

$$80.74 = 25.36 + 55.44 = 25.3 + 88 \times 0.63 = س$$

6) لتقدير المعدل في السنة الأولى نعوض في معادلة ص/س.

$$78.12 = 31 + 76 \times 0.62 = ص$$

## تمارين عامة على الوحدة السابعة

1- البيانات التالية تمثل ارقام المشاهدات س، ص كما في الجدول التالي

س	2	5	7	10	12	13	15
ص	4	10	14	20	24	26	30

والمطلوب: ايجاد نوع الارتباط بين المتغيرين مع ذكر نوعه ووصفه.

2- اوجد معامل ارتباط بيرسون لقيم المشاهدات المبوبة في الجدول التالي.

س	14	8	10	12	14	16
ص	12	8	7	5	3	1

3- من البيانات المرتبة بالجدول.

س	2	6	8	10	12	14
ص	1	2	3	4	5	6

والمطلوب (1) ايجاد معامل ارتباط بيرسون

(2) ايجاد معامل ارتباط سبيرمان للرتب.

4- من البيانات المعطاة

$$\sum_{ص=1}^{85} س = 20, \sum_{ص=20}^{30} ص = 30, \sum_{ص=30}^{165} س = 165, \sum_{ص=165}^{200} ص = 200$$

اوجد معامل الارتباط للمتغيرين بطريقة بيرسون.

5- من البيانات التالية اوجد معامل ارتباط سبيرمان للرتب اذا كان

$$\sum_{ف=1}^{55.5} ن = 6$$

س: 6: في ماييلي علامات مجموعة مؤلفة من 5 طلاب في امتحاني الرياضيات والاحصاء

س، ص على التوالي.

س	86	68	74	80	62
ص	80	65	75	75	65

المطلوب: (1) حساب معامل ارتباط بيرسون (2) معامل ارتباط سبيرمان.

(3) معادلة الانحدار ص = أ + ب س (4) اذا علم ان احد الطلبة قد حصل علامة (78) في

الرياضيات اوجد علامة الطالب في الاحصاء.

(5) ايجاد علامة الطالب في الرياضيات اذا كانت علامته في الاحصاء هي 60.

(6) رسم شكل الانتشار بناءً على المشاهدات

(7) رسم خط الانحدار .

(8) تفسير معاملي أ، ب.



## الفصل الثامن

### السلاسل الزمنية

#### (1-8) تمثيل السلاسل الزمنية

السلسلة الزمنية : مجموعة مشاهدات حول ظاهرة معينة أخذت بترتيب زمني معين عادة ما يكون هذا الترتيب فيه تساوي الفترات الزمنية مثل الساعات، الايام، الاشهر، او السنوات المتتالية.

امثلة متنوعة على السلاسل الزمنية.

\* المبيعات اليومية في مركز بيع الكتب لمدة شهر.

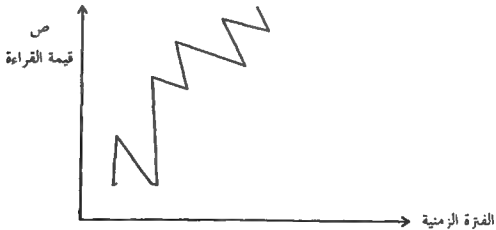
\* قراءة درجات حرارة المريض في ساعة لمدة يوم واحد.

\* قراءات الانتاج الشهري لمدة سنة في شركة الادوية العربية.

\* الانتاج الشهري من البترول لدولة الكويت ولعدة سنوات.

كل هذه القراءات وتتابعها الزمني جميعها تمثل سلسلة زمنية.

ويمكن تمثيلها بيانياً لأن كل قراءة تمثل زوجاً من النقاط كما في شكل (1-8)



شكل (1-8)

## 2-8) معامل الخشونة والمعدلات المتحركة

### 2-8-1 معامل الخشونة :

في هذا البند يبرز سؤال وهو ما المقصود من تحليل السلسلة الزمنية؟ وللإجابة نقول بان المقصود من تحليل السلسلة الزمنية هو.

(1) معرفة التغيرات التي تطرأ على السلسلة خلال الفترات المتساوية التي اخذت عندها قراءة المشاهدات.

(2) معرفة طبيعة العلاقة بين الظاهرة قيد الدراسة والظواهر الاخرى ولعل رسم منحني السلسلة يمكن ان يبرز جانب من هذه الفوائد لعملية تحليل السلسلة الزمنية.

(3) معرفة ماضي الظاهرة وكيفية تغيرها.

(4) التنبؤ بمستقبل الظاهرة قيد الدراسة مما تفيد لاتخاذ قرار معين وعند اجراء عملية التحليل للسلسلة اول عمل نقوم به رسم المنحنى البياني لقيم المشاهدات مع الزمن ونعين النقاط وبعد تعيين النقاط ورسم هذا المنحنى يبرز لنا تعرجات كبيرة في المنحنى وهذه التعرجات تجعلنا نطلق على السلسلة بانها خشنة ونستطيع قياس مدى الخشونة من خلال ايجاد معامل نسميه بمعامل الخشونة نجده من العلاقة التالية:

$$\text{معامل الخشونة} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - m)^2}{\sum_{i=1}^n (m_i - m)^2} \quad \text{معامل الخشونة} = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - m)^2}{\sum_{i=1}^n (m_i - m)^2} \quad (1-8)$$

وكلما كان هذا الرقم قليلاً كلما كانت السلسلة ملساء.

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي

مثال (1-8): احسب معامل الخشونة للسلسلة التالية 7 ، 9 ، 14 ، 15 ، 20 ، 19

الحل: لحساب معامل الخشونة نكون جدول الحل (1-8).

ن	مدر	مدر-1	مدر-مدر-1	<sup>2</sup> (مدر-مدر-1)	مدر-مدر	<sup>2</sup> (مدر-مدر)
1	7	-	-	-	-	-
2	9	7	2	4	5-	25
3	14	9	5	25	0	0
4	15	14	1	1	1	1
5	20	15	5	25	6	36
6	19	20	1-	1	5	25
ع				56		87

جدول (1-7)

$$14 = \frac{84}{6} = \frac{19 + 20 + 15 + 14 + 9 + 7}{6} = \text{مدر} = \text{نجد المتوسط الحسابي}$$

ثم نجد معامل الخشونة من العلاقة الرياضية التالية.

$$0.64 = \frac{56}{87} = \frac{\sum_{2=1}^n (مدر-مدر-1)^2}{\sum_{2=1}^n (مدر-مدر)^2} = \text{معامل الخشونة}$$

## 8-2-2: طريقة المعدلات المتحركة:

إن أهمية المعدلات المتحركة تبرز في أنها تعمل على الحد من خشونة السلسلة وجعلها

ملساء ولايجاد المعدلات المتحركة لابد من اتباع الخطوات التالية

(أ) في حالة ما اذا كان المتوسط فردياً أي ان ل=3، 5، 7، .....، ل= طول المعدل

نحدد القراءة الاولى عندما كان الزمن صفراً ونرمز لها بالرمز ص والقراءة الثانية ص<sub>1</sub> وهكذا تتكون السلسلة كما في جدول (8-2).

الزمن	0	1	2	3	.....	ن-1
قيمة الملاحظة ص <sub>د</sub>	ص <sub>0</sub>	ص <sub>1</sub>	ص <sub>2</sub>	ص <sub>3</sub>		ص <sub>ن-1</sub>

### جدول (2-8)

\* نرسم لقيم المعدلات المتحركة بالرمز ص<sub>د</sub>

\* نحدد موقع المعدل المتحرك الاول من العلاقة التالية:

$$\text{موقع المعدل الاول} = \frac{\text{طول المعدل} + 1}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1 \quad \text{..... (2-8)}$$

مثال (2-8): اذا كان طول المعدل 3 لسلسلة زمنية فان موقع المعدل

$$\text{الاول} = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ أي انه يقابل الملاحظة الثانية في السلسلة.}$$

مثال (3-8): اذا كان طول المعدل 5 لسلسلة زمنية فان موقع المعدل

$$\text{الاول} = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ أي انه يقابل الملاحظة الثالثة في السلسلة. وهكذا}$$

\* بعد تحديد موقع المعدل الاول نلجأ الى تعيين قيمة المعدل نفسه وعلى سبيل المثال

اذا كان لدينا الطول 3 وقيم الملاحظات ص<sub>0</sub>، ص<sub>1</sub>، ....، ص<sub>ن-1</sub> فان موقع المعدل

$$\text{الاول ص}_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ أي مقابل الملاحظة الثانية.}$$

$$\text{وقيمة هذا المعدل} = \frac{\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2}{3}$$

الملاحظة السابقة للمعدل + الملاحظة المقابلة للمعدل + الملاحظة اللاحقة للمعدل

3

$$\hat{\text{ص}}_2 = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3}$$

ثم نجد

$$\hat{\text{ص}}_3 = \frac{\text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4}{3}$$

وعند كتابة جدول يشمل قيم المشاهدات والمعدلات المتحركة المقابلة لها كما في الجدول (3-8).

الزمن د	0	1	2	3	4	.....	ن-2	ن-1
المشاهدات ص	ص <sub>0</sub>	ص <sub>1</sub>	ص <sub>2</sub>	ص <sub>3</sub>	ص <sub>4</sub>	....	ص <sub>ن-2</sub>	ص <sub>ن-1</sub>
التوسطات المتحركة ص'	-	ص' <sub>1</sub>	ص' <sub>2</sub>	ص' <sub>3</sub>	ص' <sub>4</sub>	..	ص' <sub>ن-1</sub>	-

جدول (3-8)

ملاحظات:

(1) نلاحظ ان ص<sub>0</sub> لم يقابلها معدل متحرك لانه لم يسبقها اية مشاهدة.

(2) ص<sub>ن-1</sub> لم يقابلها معدل متحرك وهكذا بالنسبة لباقي الاطوال الفردية

مثال (3-8): اوجد المعدلات المتحركة بطول 3 للسلسلة الزمنية

7، 11، 8، 19، 25، 14، 20.

الحل: نرتب قيم المشاهدات في جدول زمني كما هو مبين ادناه في جدول (4-8).

	ص <sub>0</sub>	ص <sub>1</sub>	ص <sub>2</sub>	ص <sub>3</sub>	ص <sub>4</sub>	ص <sub>5</sub>	ص <sub>6</sub>
الزمن ر	0	1	2	3	4	5	6
المشاهدات ص	7	11	8	19	25	14	20
المعدلات ص'	-	8.67	12.67	17.33	19.33	19.67	-

جدول (4-8)

نحدد موقع المعدل المتحرك الاول =  $\frac{1+3}{2} = 2$  مقابل ص<sub>1</sub> = 11

$$نجد: \quad 8.67 = \frac{26}{3} = \frac{8+11+7}{3} = \frac{ص_0 + ص_1 + ص_2}{3} = \hat{ص}_1$$

$$12.67 = \frac{1+8+11}{3} = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3}{3} = \text{ص}_2$$

$$17.33 = \frac{25+1+8}{3} = \frac{\text{ص}_4 + \text{ص}_3 + \text{ص}_2}{3} = \text{ص}_3$$

$$19.33 = \frac{14+25+19}{3} + \frac{\text{ص}_5 + \text{ص}_4 + \text{ص}_3}{3} = \text{ص}_4$$

$$19.67 = \frac{20+14+25}{3} = \frac{\text{ص}_6 + \text{ص}_5 + \text{ص}_4}{3} = \text{ص}_5$$

مثال (4-8): اوجد المعدلات المتحركة بطول 5 للسلسلة الزمنية

7، 13، 21، 23، 27، 19، 17.

الحل: نرتب البيانات التالية في الجدول (5-8).

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
الملاحظات صر	7	13	21	23	27	19	17
المعدلات صر	-	-	18.2	20.6	21.4	-	-

جدول (5-8)

$$\text{نجد ترتيب الملاحظة المقابلة للمعدل الاول} = \frac{1+5}{2} = 3.$$

فيكون ترتيب الملاحظة الثالثة هي المقابلة لاول معدل متحرك.

- نجد قيمة المعدل المتحرك من العلاقة

$$\hat{\text{ص}}_2 = \frac{\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4}{5}$$

$$18.2 = \frac{91}{5} = \frac{27+23+21+13+7}{5} = \hat{\text{ص}}_2$$

$$20.6 = \frac{103}{5} = \frac{19 + 27 + 23 + 21 + 13}{5} = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4 + \text{ص}_5}{5} = \hat{\text{ص}}_3$$

$$21.4 = \frac{107}{5} = \frac{17 + 19 + 27 + 23 + 21}{5} = \frac{\text{ص}_6 + \text{ص}_5 + \text{ص}_4 + \text{ص}_3 + \text{ص}_2}{5} = \hat{\text{ص}}_4$$

ب) اذا كان طول المتحرك زوجيا لذا تتبع الخطوات التالية

- نكون جدول نحدد فيه الزمن وقيم المشاهدات الاصلية

- لتحديد موقع المعدل، الاول نكتب العلاقة التالية

$$\frac{1+l}{2} = \text{موقع المعدل المتحرك الاول}$$

فعندما يكون ل=4 فان موقع المعدل الاول يكون  $2.5 = \frac{1+4}{2}$  أي ان المعدل يقع

بين الملاحظة الثانية والملاحظة الثالثة والرابعة وهكذا.

وحتى يكون المعدل المتحرك مقابل أي مشاهدة اصلية نلجأ للخطوة التالية.

- نجد معدل متحرك مركزي بطول 2 فيكون هذا المعدل مقابل للملاحظة الثالثة والرابعة وهكذا.

مثال (8-6): اوجد معدل متحرك بطول 4 لقيم المشاهدات التالية

4، 9، 15، 8، 21، 24، 11، 12.

الحل: نجد ترتيب موقع المعدل المتحرك الاول  $2.5 = \frac{1+4}{2}$

-نرتب البيانات ضمن الجدول (8-6).

الزمن	0	1	2	3	4	5	6	7
قيم الملاحظة	4	9	15	8	21	24	11	12
$\hat{\text{ص}}_7$				9	13.25	17	16	17
$\hat{\text{ص}}_8$				11.125	15.125	16.5	16.5	

جدول (8-6)

$$13.25 = \frac{53}{4} = \frac{21+8+15+9}{4} = \text{ص}_{3.5}$$

$$9 = \frac{8+15+9+4}{4} = \text{ص}_{2.5}$$

$$16 = \frac{64}{4} = \frac{11+24+21+8}{4} = \text{ص}_{5.5}$$

$$17 = \frac{68}{4} = \frac{24+21+8+15}{4} = \text{ص}_{4.5}$$

$$17 = \frac{68}{4} = \frac{12+11+24+21}{4} = \text{ص}_{6.5}$$

ثم نجد المعدلات المركزي التالية والتي سنرمز لها بالرمز  $\hat{\text{ص}}$

$$11.125 = \frac{13.25+9}{2} = \frac{\text{ص}_{3.5} + \text{ص}_{2.5}}{2} = \hat{\text{ص}}_3$$

$$15.125 = \frac{17+13.25}{2} = \frac{\text{ص}_{4.5} + \text{ص}_{3.5}}{2} = \hat{\text{ص}}_4$$

$$16.5 = \frac{16+17}{2} = \frac{\text{ص}_{5.5} + \text{ص}_{4.5}}{2} = \hat{\text{ص}}_5$$

$$16.5 = \frac{17+16}{2} = \frac{\text{ص}_{6.5} + \text{ص}_{5.5}}{2} = \hat{\text{ص}}_6$$

### 8-3) مركبات السلسلة الزمنية.

عندما نحصل على قيم المشاهدات للسلسلة الزمنية لا بد من دراسة المؤثرات التي قد تؤثر على هذه القراءات وماهذه المؤثرات الا ما نسميها بمركبات السلسلة الزمنية والتي ناتج حاصل ضربها معا يعطي قيم المشاهدة الاصلية ونعبر عن ذلك بالمعادلة التالية.

(3-8).....

$$\boxed{\text{ص} = \text{ت} \times \text{ف} \times \text{د} \times \text{خ}}$$

حيث ص: هي قيمة المشاهدة الاصلية.

ت: مركبة الاتجاه العام.



ف: المركبة الفصلية (الموسمية)

د: مركبة الدورة.

خ: مركبة الخطأ

وستتناول كل مركبة من المركبات آنفة الذكر على حدى.

#### 4-8) مركبة الاتجاه العام.

تعريف: مركبة الاتجاه العام هي المركبة التي توضح مسيرة السلسلة بشكل عام وعلى مدى بعيد ويمكن استخراجها من خلال معادلة انحدار ص/س والمتمثل بالعلاقة.

.....(4-8)

ص = أ + ب

ومن الملاحظ من العلاقة اعلاه ان قيمة ص مرتبطة بكل من أ، س بشكل رئيسي ولذا يحتمل تزايد ص او تناقصها او قد تحافظ على قيمتها ثابتة. كذلك هناك طرق اخرى لايجاد هذه المركبة منها طريقة الانتشار (التمهيد باليد)، طريقة المعدلات المتحركة، طريقة المربعات الصغرى وكذلك طريقة نصف السلسلة المتحركة.

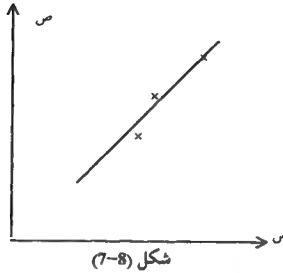
#### 1) طريقة الانتشار (التمهيد باليد):

مثال (7-8): البيانات التالية تمثل قيم مشاهدات في سلسلة زمنية لقراءات تمثل انتاج مصنع للأحذية خلال اسبوع معين كما في جدول (7-8).

اليوم	السبت	الاحد	الاثنين	الثلاثاء	الاربعاء	الخميس
مقدار الانتاج	120	140	130	145	115	125

جدول (7-8)

حيث مقدار الانتاج بالزوج. والمطلوب ايجاد مركبة الاتجاه العام عن طريق رسم انتشاري وايجاد معادلة الخط العام



ولإيجاد معادلة خط الاتجاه نأخذ نقطتين تقعان على الخط الممهد. ونرمز لهما بالرمز أ، ب ونكتب احداثي كل منهما مع ملاحظة اعطاء تسلسل عددي 1، 2، 3، ...، 6، للأيام حتى يسهل إيجاد معادلة خط الاتجاه العام والتي يمكن إيجادها من العلاقة الرياضية

$$\frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2} = \frac{ص - ص_2}{س - س_2}$$

$$\frac{130 - 145}{3 - 4} = \frac{ص - 130}{س - 3}$$

$$ص - 30 = 15 (س - 3)$$

$$ص - 130 = 15س - 45$$

$$ص = 15س + 85$$

وهذه الطريقة تختلف من شخص الى آخر مما يسبب لها عدم الدقة.

## (2) طريقة المعدلات المتحركة.

قد يحتاج الى تمهيد لخط السلسلة لكثرة التعرجات التي قد تظهر في السلسلة ولكي نجعل الخط امس نلجأ الى تمهيد هذا الخط عن طريق المعدلات المتحركة. وقد سبق وان تناولنا المعدلات المتحركة بشكل مفصل.

### (3) طريقة المربعات الصغرى.

وهذه الطريقة أكثر دقة من الطريقتين السابقتين وهي ان نجد معادلة خط الانحدار العام ل

ص/س

ص = أس + ب.

ثم نجد أ من العلاقة

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ص}{س} - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{ص}{س}}{n}}{\frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{ص}{س}\right)^2}{n} - \sum_{i=1}^n \frac{ص}{س}}$$

(5-8).....

ونجد ب من العلاقة:  $B = \overline{ص} - A \overline{س}$  (6-8).....

مثال(8-8): البيانات التالية تمثل قراءات لدرجة حرارة مريض خلال ست ساعات

مأخوذة القراءات كل ساعة كما في الجدول (8-8).

زمن القراءات	1	2	3	4	5	6
درجة الحرارة	37	38	38.5	37.5	37	37

جدول (8-8)

والمطلوب: إيجاد معادلة خط الاتجاه العام .

الحل: نشكل جدول يحوي جميع البيانات المطلوبة للحل كما في جدول (9-8).

س	ص	س.ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
1	37	37	1	1369.00
2	38	76	4	1444.00
3	38.5	115.5	9	1482.25
4	37.5	150	16	1406.25

5	37	185	25	1369
6	37	222	36	1369
21	225	785.5	91	8439.5

جدول (8-9)

وليجاد أ نطبق العلاقة اعلاه:

$$0.114 = \frac{2}{17.5} = \frac{787.5 - 785.5}{73.5 - 91} = \frac{\frac{225 \times 21}{6} - 785.5}{\frac{21 \times 21}{6} - 91} = 1$$

$$37.101 = 0.399 - 37.5 = 3.5 \times 0.114 - 37.5 = \bar{ص} - \bar{أ} س$$

∴ معادلة الاتجاه العام هي :  $37.101 + 0.114 س = ص$

د- طريقة معدل نصف السلسلة.

وهذه الطريقة اقل دقة من طريقة المربعات الصغرى الا انها اكثر دقة من المتوسطات المتحركة وطريقة الانتشار. وتتلخص بالخطوات التالية.

- نجد المتوسط الحسابي لنصف السلسلة الثاني اذا كان عدد المشاهدات زوجي اما اذا كان عدد المشاهدات فردي فتهمل المشاهدة الوسطى ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الثاني وبهذا يتعين الاحداثي الصادي للنقطتين.

- لتحديد الاحداثي السيني نعطي قيم المشاهدات ترقيم متسلسل سواء كانت المشاهدات قيما او غير ذلك ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الاول من القيم سواء كان عددها زوجي ام فردي فيكون المتوسط هو الاحداثي السيني وكذلك للنصف الثاني المتوسط الحسابي يكون هو الاحداثي السيني وبذا تتعين النقطتين.

- نصل بين النقطتين بعد تعيينهما على المستوى الاحداثي فيكون لدينا خط الاتجاه العام.

- نجد معادلة خط الاتجاه العام من العلاقة.

$$\frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2} = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$$

مثال (8-9): اذا كان انتاج مصنع للألبسة الصوفية خلال عشرة سنوات مبينة بالجدول التالي حيث الانتاج بالآف القطع. وهي كما في الجدول (8-10).

السنة س	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
عدد القطع ص المنتجة	53	64	67	60	69	74	67	79	85	90

جدول (8-10)

والمطلوب إيجاد معادلة خط الاتجاه العام بطريقة متوسط نصف السلسلة.

الحل: نتبع الخطوات التالية

نكون جدول يشمل جميع متطلبات الحل وهو كما في الجدول (8-11).

السنة س	السنة بالترقيم س	عدد القطع المنتجة ص	معدل نصف س	معدل نصف ص
1970	1	53	الأول = 3	الأول = 62.6
1971	2	64		
1972	3	67		
173	4	60		
1974	5	69		
1975	6	74	الثاني = 8	الثاني = 79
1976	7	67		
1977	8	79		
1978	9	85		
1979	10	90		

جدول (7-11)

$$\text{نصف المعدل الاول ل ص} = \frac{69 + 60 + 67 + 64 + 53}{5} = 62.6 = \text{ص}_1$$

$$\text{نصف المعدل الاول لـ ص} = \frac{90+85+79+67+74}{5} = 79 = \text{ص}_2$$

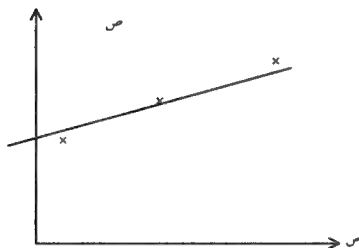
$$\text{نصف المعدل الاول لـ س} = \frac{5+4+3+2+1}{5} = 3 = \text{س}_1$$

$$\text{نصف المعدل الثاني لـ س} = \frac{10+9+8+7+6}{5} = 8 = \text{س}_2$$

∴ النقطتين هما أ (3، 62.6) ، ب (8، 79)

- نعين النقطتين على المستوى الاحداثي.

- نصل بين النقطتين أ، ب فيكون هذا هو خط الاتجاه العام.



شكل (2-7)

نجد معادلة خط الاتجاه العام

$$\frac{16.4}{5} = \frac{62.6 - 79}{3 - 8} = \frac{ص - 62.6}{س - 3}$$

$$ص - 62.6 = 313 - 16.4س$$

$$ص = 16.4س + 313 - 62.6 = 16.4س + 263.8$$

$$ص = \frac{16.4}{5}س + \frac{263.8}{5}$$

$$\text{ص} = 3.28 \text{ س} + 52.76$$

وهذه هي معادلة الاتجاه العام.

### 5-8 تقدير المركبة الفصلية.

لعل هذه الظاهرة تعني في الدرجة الاولى إيجاد قيمة الظاهرة على اعتبار انها لا تتأثر  
الا بالموسم ولحساب الاثار الموسمية هناك طريقتان.

أ- طريقة النسب للمعدل المتحرك.

ب- من العلاقة  $\text{ص} = \text{ت} \times \text{د} \times \text{خ}$

فعندما تكون المركبة الاتجاهية والمركبة الدورية والخطأ معلومتين نستطيع إيجاد المركبة  
الموسمية. وهكذا الا اننا سنتناول الطريقة الاولى بشيء من التفصيل ولسهولة التعامل  
معهنا من خلال المثال التالي.

مثال (8-10): اذا كان انتاج مصنع معين خلال خمس سنوات حيث ان كمية الانتاج  
مأخوذة كل ثلاثة شهور وثبتت البيانات بالجدول التالي والانتاج بآلاف  
الوحدات كما في الجدول (8-12).

ربيع السنة	1976	1977	1978	1979	1980
الربع الاول	7	12	8	20	25
الربع الثاني	9	11	13	21	27
الربع الثالث	10	14	15	23	28
الربع الرابع	5	20	16	19	27

جدول (7-12)

والمطلوب إيجاد النسب الموسمية لهذا الانتاج باستخدام فكرة النسبة للمعدل المتحرك.  
الحل: لحل مثل هذه المسائل تتبع الخطوات التالية.

- نجد مجموع مكونات الصفوف لمختلف سنوات الانتاج أي يجمع الانتاج في الربع الاول لكل سنة لمختلف السنوات الانتاجية.

- نجد المعدل الموسمي من العلاقة

$$\text{المعدل الموسمي} = \frac{\text{المجموع الموسمي لكل ربع}}{\text{عدد السنوات}} \quad (7-8) \dots\dots\dots$$

- نجد المعدل الموسمي العام =  $\frac{\text{مجموع المتوسطات الموسمية}}{\text{عدد الارباع}}$  (8-8).....

- نجد النسبة الموسمية لكل حالة من العلاقة

$$\text{النسبة الموسمية} = \frac{\text{المعدل الموسمي}}{\text{المعدل الكلي}} \times 100\% \quad (9-8) \dots\dots\dots$$

والان نشكل جدول تلخص فيه كل ما نحصل عليه من حسابات في الخطوات السابقة كما في الجدول (8-13).

ربع السنة	المجموع الموسمي	المعدل الموسمي	النسبة الموسمية
الربع الاول	72	14.4	87.27
الربع الثاني	81	16.2	98.18
الربع الثالث	90	18-	109.09
الربع الرابع	87	17.4	105.45
المعدل العام	82.5	16.5	400.00%

جدول (8-13)

ويمكننا قراءة النسب المتوية المختلفة من العمود الاخير ونلاحظ ان مجموعها هو 400



وذلك بضرب 100 في عدد الفصول.

ولتخليص قيم الظاهرة من تأثير التغيرات الموسمية فاننا نتبع الخطوات التالية.

- نقسم القيم الاصلية على النسب الموسمية.

- بضرب ناتج القسمة في مئة (100).

ونحصل على القيم التالية لكل قيمة فمثلاً القيمة من الربع الاول لعام 1976 بعد

$$\text{تخليصها من التأثير الموسمي تصبح} = 100 \times \frac{7}{87.27} = 8.02$$

القيمة من الربع الثاني لعام 176 بعد تخليصها من التأثير الموسمي تصبح

$$9.17 = \frac{900}{98.18} = 100 \times \frac{9}{98.18}$$

وهكذا لباقي القيم في الجدول المذكور.

جـ - التغيرات الدورية والعرضية.

يمكن الحصول على تأثير كل من التغيرات الدورية والعرضية وذلك من العلاقة

$$\text{ص} = \text{ت} \times \text{ف} \times \text{د} \times \text{خ}$$

وذلك بتخليص الظاهرة من تأثير كل من التغيرات الاتجاهية والتغيرات الموسمية معاً

ويمكن الحصول عليهما معاً من العلاقة.

(10-8).....

$$\text{د} \cdot \text{خ} = \frac{\text{ص}}{\text{ت} \times \text{ف}}$$

ونظراً لتداخلهما معا فيوجدنا بشكل قيمة واحدة.

## تمارين عامة على السلاسل الزمنية

س1: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية: 9، 13، 18، 19، 12، 21، 10

تمثل سلسلة زمنية والمطلوب إيجاد:

(أ) المعدلات المتحركة بطول 3.

(ب) المعدلات المتحركة بطول 5.

(ج) المعدلات المتحركة بطول 7.

(د) المعدلات المتحركة بطول 4.

(هـ) المعدلات المتحركة بطول 6.

(و) اوجد معامل الخشونة لهذه السلسلة

س2- الجدول التالي يمثل عدد الطلاب في مدرسة ما خلال الاعوام 1978-1987

السنة	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
عدد الطلاب	540	630	650	690	720	740	790	840	900	950

والمطلوب:

أ- رسم الشكل الانتشاري لهذه البيانات.

ب- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية

ج- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة معدل نصف السلسلة. ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

د- احسب القيم الاتجاهية عن طريق اسلوب المعدلات المتحركة وبطول 3 .

س3- الجدول التالي يمثل انتاج مصنع ما من الوحدات المنتجة مقدرة بالالف الوحدات خلال عشرة سنوات.

السنوات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد الوحدات المنتجة	7	13	19	21	27	28	32	35	39	40

والمطلوب .

أ- رسم شكل الانتشار لهذه البيانات.

ب- إيجاد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم إيجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

ج- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة المربعات الصغرى ثم إيجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.

د- اوجد معادلة الاتجاه العام باستخدام طريقة معدل نصف السلسلة ثم اوجد القيم الاتجاهية لكل قيمة اصلية.

## الفصل التاسع

### الارقام القياسية

#### 9-1) مفهوم الأرقام القياسية واستخداماتها وأنواعها:

لعل هذا الموضوع من اهم المواضيع التي تلعب دوراً هاماً في حياتنا اليومية حيث تربطنا بما سبق وبما سيكون لاحقاً وخاصة عند دراسة اسعار سابقة وربطها بالاسعار الحالية والمستقبلية لعدد من الاصناف وكذلك ايضا ربط كميات منتجة سابقا مع الانتاج الحالي والمستقبلي وهكذا دراسات اخرى. ولا نستطيع عمل دراسات من هذا النوع الا من خلال التعرف على ادوات ومقاييس لهذا الغرض تسمى بالارقام القياسية وعليه فاننا سنعطي التعريف التالي حتى نستطيع توضيح هذا المفهوم.

#### 9-1-1 : مفهوم الرقم القياسي :

لتوضيح هذا المفهوم لا بد من إعطاء التعاريف التالية :

– تعريف: الرقم القياسي هو اداة احصائية مصممة لتبين التغير في قيمة الظاهرة او مجموعة مرتبطة من الظواهر قيد الدراسة والتي لها علاقة بالنسبة لقيمتها في الزمن والمكان الجغرافي او أية خاصية اخرى.

وعندما نريد قياس التغير في قيمة الظاهرة فاننا ننسب قيمة الظاهرة في وقت معين الى قيمتها في وقت آخر او قيمتها في مكان جغرافي معين الى قيمتها في مكان جغرافي آخر. وقد تكون هناك زيادة او انخفاض في قيمة الظاهرة موضوع البحث.

فترة الاساس: هي الفترة الزمنية التي نقيس منها التغير في الظاهرة.

فترة المقارنة: هي الفترة الزمنية التي حصل خلالها تغير في الظاهرة اما اذا اردنا مقارنة التغير بين مكانين مختلفين فان المكان الذي نقيس منه التغير فيسمى مكان الاساس

والمكان الذي حصل خلاله التغير يسمى مكان المقارنة .

### 9-1-2) استخدامات الأرقام القياسية.

يمكن استخدام الأرقام القياسية في كثير من مجالات الحياة وخاصة الاقتصادية منها وذلك لأجل.

- (1) مقارنة اسعار سلع مختلفة.
- (2) مقارنة تكاليف المعيشة في مكان مع مكان آخر.
- (4) يمكن التنبؤ بأحوال الاعمال والاقتصاد.
- (5) مقارنة عدد العمال في سنة معينة مع عددهم في سنة سابقة.
- (6) مقارنة المستوى التعليمي في بلد ما وفي سنة ما مع مستواه في نفس البلد في سنة اخرى.

- (7) مقارنة عدد السكان في بلد وفي سنة ما مع عدد السكان في سنة اخرى.
- وهناك الكثير الكثير من الاستعمالات للأرقام القياسية .  
ومن المفيد أن نعطي الخصائص لسنة الأساس.

### خصائص سنة الأساس:

- (1) تحديد سنة الأساس بحيث لا تكون بعيدة عن سنة المقارنة.
- (2) ان تكون سنة الأساس ذات بنية من حيث موضع الرقم القياسي متشابهة مع ما هو عليه في سنة المقارنة.
- (3) ان تكون سنة الأساس ذات هدوء نسبي من انعكاساتها وداعياتها واثرها على الظاهرة قيد الدراسة.

### 9-3-1) أنواع الأرقام القياسية:

- هناك عدة أنواع من الأرقام القياسية نذكر منها.
- (1) الأرقام القياسية البسيطة.

(2) الأرقام القياسية المرجحة.

9-2) الرقم القياسي البسيط.

تعريف: الرقم القياسي البسيط وهو الرقم المتمثل من نسبة متغير واحد في فترة المقارنة على نفس المتغير في فترة أخرى هي فترة الأساس ومن هذه الأرقام ويقسم إلى قسمين :

(1) الرقم القياسي البسيط.

(2) الرقم القياسي التجميعي البسيط.

أما الأرقام القياسية البسيطة ومنها.

أ) الرقم القياسي البسيط للسعر (منسوب السعر).

وهو النسبة المئوية لسعر سلعة معينة في سنة المقارنة والذي سنرمز له بالرمز  $s_m$  الى سعرها في سنة الأساس والذي سنرمز له بالرمز  $s_0$  وبصيغة رموز يمكن كتابته على النحو.

$$I_r = \frac{s_m}{s_0} \times 100\% \quad \text{حيث } I_r: \text{الرقم القياسي البسيط للأسعار} \dots (1-9)$$

مثال (1-9): اذا كان معدل سعر كيلو البندورة في عام 1990 هو 25 قرشاً وفي عام 1995 كان 27 قرشاً اوجد الرقم القياسي البسيط لسعر البندورة على اعتبار أن عام 1990 هو سنة الأساس.

$$\text{الحل: } I_r = \frac{27}{25} \times 100\% = 108\% \quad \text{أي بزيادة قدرها } 8\% .$$

ب) الرقم القياسي البسيط للكميات (منسوب الكمية).

هو النسبة المئوية لكميات او حجوم سلعة معينة في فترة معينة (سنة مقارنة) والتي سنرمز لها بالرمز  $Q_m$  الى كمياتها او حجومها في فترة أخرى (سنة أساس) والتي سنرمز لها بالرمز  $Q_0$  وبصيغة رموز يمكن كتابتها على الصورة

(2-9).....

$$أ ك = \frac{ك}{ك_0} \times 100 \%$$

(ج) الرقم القياسي البسيط للقيمة (منسوب القيمة)

هو النسبة المئوية المتوية لقيمة سلعة معينة في فترة المقارنة والتي سنرمز لها بالرمز  $ك = ك_0 \times م$  الى قيمتها في سنة الاساس والتي سنرمز بالرمز  $ك_0 = ك_0 \times م_0$  ويمكن صياغتها على النحو

(3-9).....

$$أ_0 = \frac{ك_0 \times م_0}{ك_0} \times 100 \%$$

(2) الأرقام القياسية التجميعية البسيطة:

وهي تقسم الى ثلاثة اصناف نذكر منها ما يلي:

(4-9).....

$$أ) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = 100\% \times \frac{\sum_{i=1}^n م_i}{\sum_{i=1}^n م_0}$$

(5-9).....

$$ب) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات} = 100\% \times \frac{\sum_{i=1}^n ك_i}{\sum_{i=1}^n ك_0}$$

(6-9)...

$$ج) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة} = 100\% \times \frac{\sum_{i=1}^n ك_i م_i}{\sum_{i=1}^n ك_0 م_0}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n ق_i}{\sum_{i=1}^n ق_0} \times 100 \%$$

9-3: الأرقام القياسية المرجحة: ومنها:

9-3-1 الأرقام القياسية للأسعار والمرجحة بالكميات.

ومن أمثلة هذا النوع من الأرقام ما يلي :

أ) الرقم القياسي البسيط للأسعار والمرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسبير للأسعار).

$$\text{الرقم القياسي لاسبير} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك.}_0}{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك.}_1} \times 100\% \dots\dots\dots (9-7)$$

ب) الرقم القياسي للأسعار والمرجح بكميات سنة المقارنة.

$$\text{رقم باش للأسعار} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك.}_1}{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك.}_0} \times 100\% \dots\dots\dots (9-8)$$

الرقم القياسي للأسعار والمرجح بالمتوسط الحسابي لكميات سنة الأساس والمقارنة

$$\begin{aligned} \text{ج) (رقم مارشال-إيدجورث)} &= \frac{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك.}_1 \times \left( \frac{\text{ك.}_0 + \text{ك.}_1}{2} \right)}{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك.}_0 \times \left( \frac{\text{ك.}_0 + \text{ك.}_1}{2} \right)} \times 100\% \dots\dots\dots (9-9) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك.}_1 (\text{ك.}_0 + \text{ك.}_1)}{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك.}_0 (\text{ك.}_0 + \text{ك.}_1)} \times 100\% \end{aligned}$$

5) الرقم القياسي التجميعي للأسعار والمرجح بالوسط الهندسي لكميات سنة الأساس وسنة المقارنة.

(10-9).....

$$\%100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i \times q_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i \times q_i}} =$$

(6) رقم فيشر للأسعار = رقم لاسبير × رقم باش وهو الرقم الأمثل

(11-9)...

$$\%100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i \times q_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i \times q_i}} \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i \times q_i}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{p_i \times q_i}} = \text{رقم فيشر للأسعار}$$

(ب) الأرقام القياسية للكميات والمرجحة بالأسعار:

وهي نفس الأرقام السابقة ولكن بدلا من الترجيح بالكميات كما كان سابقا بل الكميات ترجح بالأسعار.

مثال (1-9): البيانات في جدول رقم (1-9) تبين أسعار (س) بالدينار/طن وكميات

(ك) بالآلاف الأطنان لثلاثة أصناف من الخضروات المباعة في السوق المركزي

في عامي 1990، 1994.

1994		1990		الصنف
ك م	س م	ك م	س م	الصنف
80	350	160	250	بنندورة
25	200	15	150	بازنجان
10	400	5	350	فلفل أخضر

جدول (1-9)



## المطلوب إيجاد

- (1) الرقم القياسي البسيط لسعر صنف البندورة.
  - (2) الرقم القياسي البسيط التجميعي للأسعار.
  - (3) الرقم القياسي البسيط التجميعي للكميات.
  - (4) رقم لاسبير للأسعار.
  - (5) رقم باش للأسعار.
  - (6) رقم مارشال - ايديجورث للأسعار (المرجح بالوسط الحسابي)
  - (7) الرقم القياسي للأسعار والمرجح بالوسط الهندسي.
  - (8) الرقم القياسي الامثل (رقم فيشر)
- الحل: نكون جدول الحل (9-2).

		1994		1990						الصنف
س م	كم + كم م	س م	كم + كم م	س م	كم + كم م	س م	كم + كم م	س م	كم + كم م	
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
17500	24500	70	20000	28000	21000	15000	80	350	60	البندورة
3000	4000	20	3750	5000	3000	2250	25	200	15	الباذنجان
2625	3000	7.5	35000	4000	2000	1750	10	400	5	العلفل الأخضر
23125	31500		272500	37000	26000	19000	115	950	80	المجموع

## جدول (9-2)

(1) الرقم القياسي البسيط للبندورة =  $100 \times \frac{350}{250} = 140\%$  أي بزيادة مقدارها 40%.

(2) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار =  $100 \times \frac{950}{750} = 126.67\%$

$$(3) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات} = \frac{115}{80} \times 100\% = 143.75\%$$

$$(4) \text{ رقم لاسبير} = \frac{100 \times \sum_{i=1}^n \frac{\text{من دور ك}}{\text{دور ك}}}{19000} = 136.84\%$$

$$(5) \text{ باش للاسعار} = \frac{100 \times \sum_{i=1}^n \frac{\text{من دور ك}}{\text{دور ك}}}{27250} = 135.77\%$$

$$(6) \text{ رقم مارشال ايدجورت} = \frac{100 \times \sum_{i=1}^n \frac{(\text{ك} + \text{دور ك})}{2}}{23125} = 136.22\%$$

(7) ثم نكون جدول (3-9) تابع

س.م.د. ك × دور ك	س.م.د. ك × دور ك	س.م.د. ك × دور ك
24248.0	17320.00	69.28
3872.0	2904.00	19.36
2828.0	2474.5	7.07
30948	22698.5	المجموع

جدول (3-9)

(7) الرقم القياسي للاسعار والمرجح بالوسط الهندسي

$$100 \times \frac{30948}{22698.5} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\text{من دور ك} \times \text{دور ك}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\text{دور ك} \times \text{دور ك}}}$$

$$-136.34\%$$

(8) الرقم القياسي الامثل (فيشر) =  $\sqrt{\text{الاسبير} \times \text{باش}}$

$$\sqrt{135.77 \times 136.84} = 136.30\%$$

مثال (9-2): البيانات في جدول (9-4) تمثل الكميات المباعة واسعار مجموعة من الاصناف في سنتي 1975، 1979.

سنة 79		سنة 75		السنة
كم ر	سم ر	كم ر	سم ر	الصنف
50	105.4	24	59.2	أ
48	31.7	22	22	ب
49	10.3	27	2.8	جـ
54	6.6	28	8.7	د

جدول (9-4)

المطلوب : ايجاد

(1) الرقم القياسي للاسبير.

(2) الرقم القياسي لباش.

(3) الرقم القياسي لمارشال والمرجح بالوسط الحسابي.

(4) الرقم القياسي لمارشال والمرجح بالوسط الهندسي.

(5) الرقم القياسي لفيشر.

الحل: تكوين جدول الحل (9-5).

الصف	السنة		سنة 75		سنة 79		سم. د. كم. ر	سم. ر. كم. ر	سم. د. كم. ر
	ب	ج	د	المجموع	كم. ر	سم. ر	كم. ر	سم. ر	كم. ر
ب	22	22	48	31.7	48	1056	484	1521.6	
ج	2.8	27	49	10.3	49	137.2	75.6	504.7	
د	8.7	28	54	6.6	54	469.8	243.6	356.4	
المجموع	-	-	-	-	-	-	2080	7652.7	

جدول (5-9)

نكون جدول (6-9) تابع

سم. د. كم. ر.	كم. ر. كم. ر.	سم. ر. (كم. ر. كم. ر.)	كم. ر. كم. ر.	سم. ر. كم. ر.	كم. ر. كم. ر.	سم. ر. كم. ر.
2529.6	158.6	7930	3806.4	74.8818	3744.0887	1797.1626
697.4	53.7	2577.6	1181.4	26.40083	1267.5999	580.9833
278.1	13.1	641.9	353.7	5.3703	263.1441	144.9978
184.8	15.3	826.2	428.2	7.5776	409.903	212.1728
3689.9	240.7	11975.7	5769.9	114.238	5684.0231	2735.3164

جدول (6-9)

$$(1) \text{ الرقم القياسي للاسبير} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{سم. ر. كم. ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{كم. ر. كم. ر.}} \times 100\%$$

$$= \frac{4323}{2080} \times 100\% = 207.8365\%$$

أي بزيادة مقدارها 107٪

$$(2) \text{ الرقم القياسي لباش} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{من دور ك.د.}}{\sum_{i=1}^n \text{من دور ك.د.}} \times 100\%$$

$$= 100\% \times \frac{7652.7}{3689.9} = 207.3959\%$$

أي بزيادة 107.3959%

$$(3) \text{ الرقم القياسي لمارشال - ايدجورث} = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{ك.د.} + \text{ك.د.})}{\sum_{i=1}^n (\text{ك.د.} + \text{ك.د.})} \times 100\%$$

$$= 100\% \times \frac{11975.7}{5769.9} = 207.5547\%$$

أي بزيادة 107.55%

$$(4) \text{ رقم قياسي مارشال - ايدجورث المرجح بالوسط الهندسي} = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{\text{ك.د.} \cdot \text{ك.د.}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\text{ك.د.} \cdot \text{ك.د.}}} \times 100\%$$

$$= 100\% \times \frac{5684.0231}{2735.3164} = 207.8023\%$$

أي بزيادة 107.8013%

$$(8) \text{ الرقم القياسي الامثل (فيشر) = } \sqrt{\text{الاسير} \times \text{باش}}$$

$$= \sqrt{207.9359 \times 207.8365}$$

$$= \sqrt{43104.438} = 207.6161\%$$

أي بزيادة 107.6161%

مثال (9-3): البيانات التالية في جدول (9-7) تمثل الاسعار والكميات المباعة لعدة اصناف سنة 1975، 1979.

1979		1975		الصف
س	ك	ك	س	
50	105.4	24	53.2	البندورة
48	37.7	22	22	الباذنجان
49	10.3	27	2.8	الفلفل
54	6.6	28	8.7	العنب
201	160	101	86.7	المجموع

جدول (7-9)

المطلوب: إيجاد الأرقام القياسية المختلفة على اعتبار أن 1975 سنة أساس 1979 سنة مقارنة.

الحل: نكون جدول الحل رقم (8-9)

الصف	ك س	ك س	ك س	ك س
البندورة	52.70	2529.6	2660	1276.8
الباذنجان	1809.6	829.4	1056	484
الفلفل	504.7	278.1	137.2	75.6
العنب	356.4	184.8	469.8	243.6
المجموع	2732.4	3821.9	4323	2080

جدول (8-9)

ثم نبدأ بتطبيق العلاقات الرياضية واستخدام الجدول

$$(1) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار } = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n p_{i0}} = 100 \times \frac{201}{101} = 199\%$$

$$= 199\%$$

$$(2) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر}}{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.}} = \%100 \times \frac{160}{86.7} = \%184.54$$

$$(3) \text{ رقم لاسبير للاسعار} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{م.م.ر. ك.م.ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.}} = \%100 \times \frac{432300}{2080} = \%207.84$$

$$(4) \text{ رقم باش للاسعار} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{م.م.ر. ك.م.ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{م.م.ر. ك.م.ر.}} = \%100 \times \frac{7940.7}{3821.9} = \%207.77$$

$$(5) \text{ رقم فيشر للاسعار} = \sqrt{207.77 \times 207.84} = \%207.8$$

م.م.ر. ك.م.ر.	س.م.ر. ك.م.ر.	ك.م.ر. ك.م.ر.	م.م.ر. ك.م.ر. $\times \frac{\text{ك.م.ر.} + \text{ك.م.ر.}}{2}$	م.م.ر. ك.م.ر. $\times \frac{\text{ك.م.ر.} + \text{ك.م.ر.}}{2}$
3744	1797.12	74.88	3960	1900.8
1382.4	633.6	28.8	1432.8	656.7
263.13	144.99	5.37	320.95	176.85
409.32	212.24	7.58	413.1	214.2
5798.85	2787.95		6126.85	2948.55

جدول (9-9)

$$(6) \text{ رقم مارشال - ايدجورث للاسعار} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{م.م.ر.} \times \left( \frac{\text{ك.م.ر.} + \text{ك.م.ر.}}{2} \right)}{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.} \times \left( \frac{\text{ك.م.ر.} + \text{ك.م.ر.}}{2} \right)} = \%100 \times \frac{6126.85}{2948.55}$$

$$= \%100 \times \frac{6126.85}{2948.55}$$

$$= 207.79\%$$

(7) رقم مارشال ايدجورث للوسط الهندسي للاسعار.

$$100\% \times \frac{5798.85}{2787.95} = 100\% \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{x_{i0} \times x_{i1}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{x_{i0} \times x_{i1}}} =$$

$$= 208\%$$



## الوحدة العاشرة

### الاحصاءات الحيوية

10-1 : تعريف الاحصاءات السكانية وأهميتها :

10-1-1 تعريف الاحصاء السكاني :

( الاحصاء السكاني هو الدراسة الاحصائية للسكان وخصائصهم وفعاليتهم وتغيراتهم من حيث التكاثر والوفاة والانتقال والعوامل التي تؤثر فيها والنتائج التي تنشأ عنها)

10-1-2 أهمية الاحصاء السكاني :

قبل الدخول في شرح أهمية الاحصاء السكاني لابد من تعريف السكان وهم مجموعة من الناس تعيش ضمن حدود بلد معين سواء كانوا يعيشون بصفة دائمة او مؤقتة.

وتنبع أهمية الاحصاء السكاني من انه يقوم بدراسة السكان وجمع البيانات المختلفة عنهم وهذه البيانات تعتبر مهمة جدا وخاصة بالنسبة لصانعي القرار والعمليات التخطيطية فالقرار الناجح هو القرار الذي يعتمد على معلومات دقيقة ونلاحظ بأن السكان هم مصدر النشاطات الاقتصادية والثقافية والصحية والاجتماعية وغيرها وهذه النشاطات مترابطة ويؤثر بعضها في بعض.

ويمكن الحصول على البيانات السكانية من مصدرين.

أ- التعداد السكاني: وهي عملية حصر الافراد في مكان محدد في لحظة معينة بهدف جمع البيانات التي تصف افراد المجتمع وهناك نوعان من التعداد:

1- التعداد النظري: وهو حصر الفرد في المكان الذي تعود ان يقيم فيه الشخص بشكل دائم بغض النظر عن مكان وجوده الفعلي لحظة التعداد.

2- **التعداد الفعلي:** حصر الاشخاص في مكان وجودهم لحظة التعداد حتى ولو كان زائرا (تعداد واقعي).

وكان آخر تعداد للسكان هو في الاردن سنة 1976 ومن اهدافه تكوين خامات للدراسة والبحوث.

### 10-1-3) انواع البيانات التي يتم حصرها:

- 1) بيانات عن خصائص الافراد كالعمر، الجنس، والديانة.
  - 2) بيانات عن تكوين الاسرة كالعهد والسكن.
  - 3) بيانات عن الخصوبة مثل عدد المواليد للنساء المتزوجات والارامل.
- كيفية جمع البيانات:

- 1) تحديد الهدف.
- 2) وضع الوحدات الادارية على الخرائط ثم تحديدها على الارض.
- 3) تحديد اجزاء الوحدات الادارية الى قرية وقضاء.
- 4) ترقيم الطرق والالوية.
- 5) حصر المكان.
- 6) تقييم البيانات: وذلك عن طريق اضافة المواليد والضيوف الى البيانات في ليلة التعداد، وطرح الوفيات والغائبين في ليلة التعداد حتى نحصل على ارقام مطابقة للارقام في ليلة التعداد.

### 10-1-4) التحرك السكاني

والتحرك السكاني يحتوي على نوعين من التحركات هما التحرك الداخلي (الهجرة الداخلية) والتحرك الخارجي ويسمى بالهجرة الخارجية.

#### 1- الهجرة الداخلية

وهي انتقال السكان من المناطق الريفية الزراعية الى المدن حيث توجد فيها المصانع

وهذا يتم في داخل البلد الواحد والدوافع للهجرة هي ما يلي:-

- الدوافع المادية كنقص في الموارد المحلية وضيق العيش مما يدفع عدد من السكان الى الانتقال الى حيث توجد الثروات الطبيعية وفرص العمل الجيدة والمغرية مما يؤدي الى رفع مستوى المعيشة وغالبا ما تكون هذه الاقاليم اكثر انتعاشا ورواجا مما يساعد السكان المهاجرين اليها في مما رسة اعمالهم التجارية ومزاولة المهن الحرة والحصول على اجور مرتفعة.

- الكثافة السكانية ويقصد بها ارتفاع عدد السكان في بعض الاقاليم نتيجة لعوامل اقتصادية او اجتماعية او ثقافية ففي هذه الحالة اما تلجأ الدولة الى توزيع السكان الى أقاليم اخرى اقل كثافة او ان يلجأ الافراد الى الهجرة الى اقاليم اخرى لتحسين ظروف معيشتهم.

- المناخ المختلف في الاقاليم المختلفة داخل البلد الواحد حيث ان معظم الناس يفضل الانتقال الى الاماكن ذات الطقس المعتدل.

- بعض الاقاليم داخل البلد الواحد تعتبر اكثر تطورا من غيرها بوجود المرافق العامة المتطورة والخدمات المتطورة مما يؤدي الى انتقال السكان الى هذه الاقاليم للاستفادة من الامتيازات الموجودة فيها.

اما الهجرة الداخلية فلا تأثير لها على عدد السكان.

## 2- الهجرة الخارجية

وهي انتقال السكان من بلد الى اخر ودوافع هذا النوع من الهجرة ما يلي:-

- دوافع اقتصادية - دوافع سياسية - طلبا للعلم

وهذا النوع من الهجرة توجد له اثاره على كل من البلد المرسل للمهاجرين والبلد المستقبل للمهاجرين ومن هذه الاثار مايلي:-

(1) نقص عدد السكان في البلد المرسل وزيادته في البلد المستقبل.

(2) تركيبة السكان من حيث العمر والجنس والمهنة في كل من البلد المرسل والبلد المستقبل.

## مقاييس النمو السكاني

ان التغير في عدد السكان ينتج عن الزيادة الطبيعية وهي الفرق بين المواليد وعدد الوفيات بالاضافة الى صافي الهجرة الذي يشكل الفرق بين اعداد المهاجرين الى البلد والمهاجرين منه ومن مقاييس النمو السكاني:

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء} - \text{عدد الوفيات}}{\text{اجمالي عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \dots (1-10)$$

مثال (1-10) : اذا كان عدد المواليد احياء في احدى البلدان 300000 وكان عدد السكان في منتصف السنة 10.000.000 وعدد الوفيات 100000 فال مطلوب استخراج معدل الزيادة الطبيعية لهذا البلد.

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{100000 - 300000}{10000000} \times 1000 = -20 \text{ بالالف}$$

## (2-10) التقديرات السكانية وايجادها باستخدام نظام المتوالية العددية :

الافتراض في هذا النظام ان السكان يتزايدون او يتناقصون بمقدار عددي ثابت من سنة لآخرى في الفترة الفاصلة بين تعدادين للسكان. ولتقدير عدد السكان فاننا نستخدم الصيغة التالية:-

.....(2-10)

$$ح = ع_1 + (ن-1)ز$$

حيث ان ح= التعداد اللاحق ع<sub>1</sub>= التعداد الاول  
ن= عدد السنوات بضمنها سنة التعداد الاول

ز = المقدار الثابت للزيادة السكانية (اساس المتواليه العددية)

مقال (10-2): إذا كان عدد سكان بلد ما عام 1960، 1970 على التوالي 3 ملايين، 3.8 مليون

المطلوب تقدير حجم السكان عام 1980 باتباع نظام المتواليات العددية.

الحل: تحتسب اولا كمية الزيادة السنوية الثابتة (ز)

$$j(1-11)+3=3.8$$

$$j_{10+3}=3.8$$

$$;10=3-3.8$$

$10^{-0.8}$

$$0.08 = \frac{0.8}{10} = j$$

والان نقدر عدد السكان عام 1980

$$0.08(1-21)+3=80\%$$

$$0.08 \times 20 + 3 = 80\%$$

4.6 = 1.6 + 3 = 807 مليون

ب- المصدر الثاني للبيانات السكانية هو الاحصاءات الحيوية

### 10-3) إحصائيات الوفيات

يوجد عدة عوامل تؤثر على الوفيات أهمها:

## 1- الحروب ومضاعفاتها الصعبة

## 2- المجماعات والامراض المعدية ترفع اعداد الوفيات

3- التقدم الحضاري والصحي يخفض معدل الوفيات ومن اهم معدلات الوفيات ما يلي:-

$$\text{أ- معدل الوفيات الخام} = \frac{\text{اجمالي عدد الوفيات عدا المواليد الموتى}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad \text{.. (3-10)}$$

مثال (3-10): اذا كان عدد الوفيات عد المواليد موتى 100000 وكان عدد السكان في منتصف العام 8.000.000 فاحسب معدل الوفيات الخام بالالاف.

$$\text{معدل الوفيات الخام} = \frac{100000}{8000000} \times 1000 = 12.5 \text{ بالآلف}$$

$$\text{ب) معدل وفيات الأمومة} = \frac{\text{عدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad \text{.. (4-10)}$$

مثال (4-10) : اذا كان عدد المواليد الاحياء في محافظة ما 250000 وعدد وفيات النساء اثناء الحمل والولادة 2000 فاحسب معدل وفيات الامومة.

$$\text{معدل وفيات الامومة} = \frac{2000}{250000} \times 1000 = 8 \text{ بالآلف}$$

$$\text{ج) معدل وفيات الاطفال الرضع لاقل من سنة} = \frac{\text{عدد وفيات الاطفال الرضع}}{\text{عدد المواليد الاحياء}} \times 1000 \quad \text{.. (5-10)}$$

مثال (5-10) : اذا كان عدد وفيات الاطفال الرضع (الاقل من سنة) 5000 وكان عدد المواليد الاحياء 250000 حسب معدل وفيات الاطفال الرضع

$$\text{معدل وفيات الاطفال الرضع} = \frac{5000}{250000} \times 1000 = 20 \text{ بالآلف}$$

عدد الوفيات لعمر أقل من 28 يوم

$$(د) \text{ معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة (اقل من شهر)} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء}}{1000} \times 1000 \dots (6-10)$$

مثال (6-10): إذا كان عدد الاطفال المتوفين من أعمار 28 يوما فأقل يساوي وعدد المواليد احياء 250000 فاحسب معدل وفيات الاطفال حديث الولادة.  
الحل : معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة =  $\frac{150}{250000} \times 1000 = 0.6$  بالآلف

عدد الوفيات ( من 28 يوم الى 11 شهر

$$(هـ) \text{ معدل وفيات الطفولة المبكرة} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء - عدد الوفيات اقل من 28 يوم}}{1000} \times 1000 \dots (7-10)$$

مثال (7-10): إذا كان عدد وفيات الاطفال في سن مبكرة (28 يوما الى 11 شهرا) 2500 وعدد المواليد احياء 230470 وعدد الوفيات في السن الاقل من 28 يوما 470 وفاة احسب معدل وفيات الطفولة المبكرة.  
الحل : معدل وفيات الطفولة المبكرة =

$$= \frac{2500}{470 - 230470} \times 1000 = \frac{2500000}{230000} = 10.9 \approx 11 \text{ بالآلف}$$

#### 4-10 احصائيات الخصوبة:

وتقسم الى مجموعتين رئيسيتين:

ب - مقاييس النمو السكاني

أ - معدلات ونسب المواليد

أ - معدلات ونسب المواليد:

وتحتوي على المعدلات التالية:

عدد المواليد احياء خلال السنة

$$(1) \text{ معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد السكان في نصف سنة}}{1000} \times 1000 \dots (8-10)$$

مثال (10-8) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال عام 1985 في احدى المحافظات (30000) وعدد السكان في هذه المحافظات (400000) فأوجد معدل المواليد الخام لكل 1000 نسمة من السكان.

$$\text{الحل : معدل المواليد الخام} = \frac{30000}{400000} \times 1000 = 75 \text{ بالآلف}$$

عدد المواليد احياء خلال السنة
(2) معدل الخصوبة العام = $1000 \times \frac{\text{عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة}}{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}$ ... (10-9)

مثال (10-9) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 80000 في احدى البلدان وكان عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة يساوي 900000 فأوجد معدل الخصوبة العام.

$$\text{الحل : معدل الخصوبة العام} = \frac{80000}{900000} \times 1000 = 88.9 \text{ بالآلف}$$

عدد المواليد احياء خلال السنة
(3) معدل الخصوبة للنساء المتزوجات = $1000 \times \frac{\text{عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة}}{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}$ ... (10-10)

مثال (10-10) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 100000 في احدى البلدان وكان عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة يساوي 1500000 فأوجد معدل الخصوبة للنساء المتزوجات.

$$\text{معدل الخصوبة للنساء المتزوجات} = \frac{100000}{1500000} \times 1000 = 66.7 \text{ بالآلف}$$



عدد المواليد الأحياء لفئة سن معينة

$$(4) \text{ معدل الخصوبة حسب فئات العمر} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء لفئة سن معينة}}{1000} \times 1000 \quad (11-10)$$

عدد الاناث في نفس فئة السن في منتصف السنة

مثال (11-10): إذا كان عدد المواليد الأحياء 200000 والتي أنجبتها 2000000 سيدة في فئة السن 20 - 25 سنة في إحدى البلدان فأوجد معدل الخصوبة حسب فئة السن 20 - 25

$$\text{الحل : معدل الخصوبة حسب فئة السن 20 - 25} = \frac{200000}{2000000} \times 1000 = 100$$

بالألف

المواليد الأحياء

$$(5) \text{ الخصوبة الكلية (النظرية)} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء}}{1000} \times 1000 \quad (12-10) \dots\dots$$

عدد الاناث في سن الانجاب

مثال (12-10): إذا كان عدد المواليد الأحياء في بلد ما (300000) وعدد الاناث في سن الانجاب 3.000.000 فأوجد معدل الخصوبة الكلية

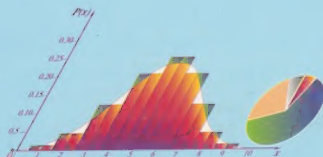
$$\text{الخصوبة الكلية} = \frac{300000}{3000.000} \times 1000 = 100 \text{ بالألف}$$

## المراجع

- مقدمة في الأساليب الاحصائية، د. شفيق العتوم ، 1992.
- أسس علم الاحصاء، عزام صبري وعلي أبو شرار، 1991.
- علم الاحصاء نظريات وتطبيقات، عزام صبري وعلي أبو شرار، 1990.
- مبادئ الاحصاء للمهن التجارية، كامل فليفل وفتحي حمدان، 1995.



# مبادئ الإحصاء



د. أصفاء للطباعة والنشر والتوزيع



عُتْمَان. شارع السُّلْطَان. مَجْمَع الفَحِيم الجُبَارِي. لِفَاكْس 4612190

ص.ب 922762 عُمَان 11121 الأُردُن

يُطَلَّب مِن

مَكْتَبَةُ الرَّاغِبِي الْعَامِيَّة



أُوْطُنِي. هَافِيف 678122 فَاكْس 678121  
ص.ب 42373 أُوْطُنِي. الإِمَارَات العَرَبِيَّة المَحَدَّة

رَدْمَك 3-40-402-9957 ISBN